INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVI. BAND DRITTES UND VIERTES HEFT 1948

SPRINGER-VERLAG · BERLIN UND HEIDELBERG

Preis RM 24.—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig,** Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Karlsruhe i. B., Technische Hochschule

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Eine Lieferung weiterer Exemplare ist zur Zeit auch gegen Berechnung nicht möglich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Barth, Walter, Versuche zur Bestimmung der Feinheit und des Widerstandes schwebender staubförmiger Körper *(Freiburg/Br., 20. 8. 1901)* 147

Goriupp, Kurt, Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte (II. Mitteilung)..... 153

Siebel, Erich, Anwendung der Henckyschen Sätze über das Gleichgewicht in plastischen Körpern auf die technischen Formgebungsverfahren *(Solingen, 17. 5. 1891)* 164

Görtler, Henry, Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten *(Calgary in Canada, 26. 10. 1909)* 173

Grammel, Richard, Eine Verallgemeinerung der Kreis- und Hyperbelfunktionen *(Klosterreichenbach, 3. 3. 1889)* 188

Schlichting, Hermann, Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung *(Balje/Elbe, 22. 9. 1907)* 201

Swida, Waldemar, Die Formänderungsenergiesätze in Anwendung auf den elastisch-plastischen Zustand *(Borissow bei Wilna, 28. 1. 1903)* 221

Wieghardt, Karl, Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten *(Wien, 20. 11. 1913)* 231

Walz, Alfred, Anwendung des Energiesatzes von Wieghardt auf einparametrige Geschwindigkeitsprofile in laminaren Grenzschichten *(Mülhausen/Elsaß, 11. 5. 1907)* 243

Betz, Albert, Einfluß der Elastizität der Gase auf die Wirkung von Schaufelgittern *(Schweinfurt, 25. 12. 1885)* 249

Plank, Rudolf, und *Leonhard Riedel*, Ein neues Kriterium für den Verlauf der Dampfdruckkurve am kritischen Punkt *(Kiew, 6. 3. 1886; Bad Reinerz, 6. 9. 1912)* 255

Mönch, Ernst, Praxis des spannungsoptischen Versuchs mit Dekorit als Modellwerkstoff *(Grünwald, 2. 11. 1909)* 267

INGENIEUR-ARCHIV

XVI. BAND — DRITTES UND VIERTES HEFT — 1948

Versuche zur Bestimmung der Feinheit und des Widerstandes schwebender staubförmiger Körper.

Von **W. Barth** in Nonnenhorn (Bodensee).

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden die Grundlagen eines Verfahrens behandelt, welches eine Widerstandsbestimmung schwebender Staubteilchen gestattet. Die Methode eignet sich zur Feinheits- und Korngrößenbestimmung von Mehlen und Stauben, ferner zur Klärung einer Reihe grundsätzlich wichtiger Fragen in bezug auf die Widerstandsverhältnisse sehr kleiner Körper.

Zur Bestimmung der Feinheit von Mehlen und Stauben werden in der Hauptsache folgende Verfahren[1] benutzt: die Siebung, die Windsichtung und die Sedimentation. Man hat auch versucht, aus der Durchlässigkeit von Staubschichten[2, 3] Schlüsse auf die Staubfeinheit zu ziehen. Verschiedene Nachteile und Fehlerquellen dieser Verfahren lassen sich bei der beschriebenen Methode vermeiden.

2. Theoretische Grundlagen. Ein staubführender Gasstrom möge durch die in Abb. 1 dargestellte Düse gesaugt werden. Diese besteht aus einer zylindrischen Bohrung von einer gewissen Länge und ist im Einlauf leicht abgerundet. Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

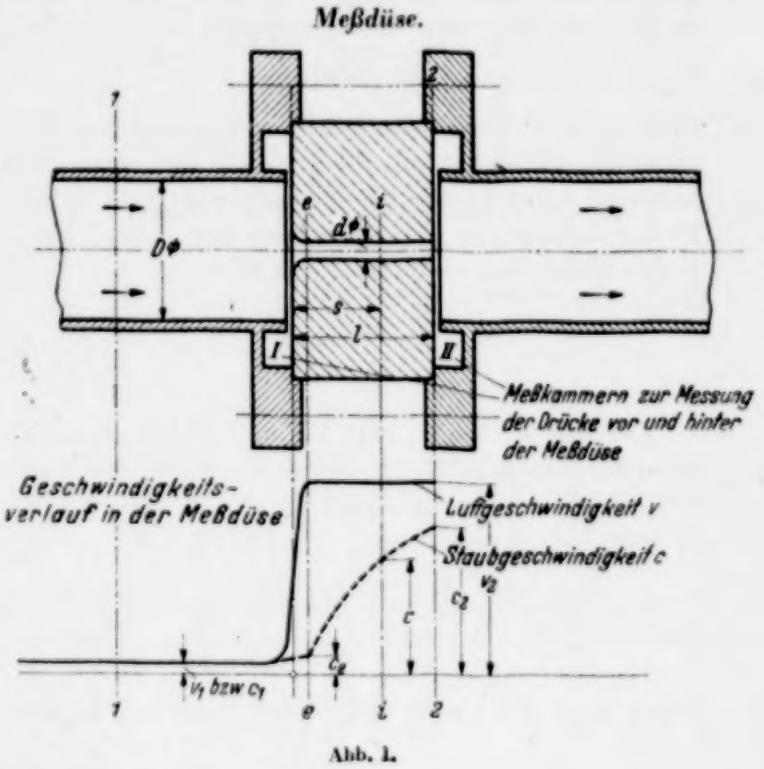


Abb. 1.

l	Länge der Bohrung,
d	Durchmesser der Bohrung,
V	Angesaugte Luftmenge in der Zeiteinheit,
G	Angesaugte Staubmenge in der Zeiteinheit,
γ_l	Raumgewicht der Luft,
γ_s	Raumgewicht des Staubes,
s	Abstand der Ebene $i-i$ vom Düseneinlauf,
v	Luftgeschwindigkeit in der Ebene $i-i$,
c	Staubgeschwindigkeit in der Ebene $i-i$,
v_2	Luftgeschwindigkeit am Düsenaustritt,
c_2	Staubgeschwindigkeit am Düsenaustritt,
c_e	Staubgeschwindigkeit am Eintritt in die zylindrische Bohrung,
v_1	Luftgeschwindigkeit vor der Düse,
c_1	Staubgeschwindigkeit vor der Düse,
g	Erdbeschleunigung,
λ	Rohrreibungsbeiwert in der Meßdüse,
f	Durchmesser der als Kugeln aufgefaßten Staubteilchen,
a	Widerstandsbeiwerte von Kugeln,
w_f	Fallgeschwindigkeit von Körpern in ruhender Luft,

[1] Fachausschuß für Staubtechnik: „Richtlinien für die Pestimmung der Zusammensetzung von Stauben nach Korngröße und Fallgeschwindigkeit". VDI.-Verlag 1936.
[2] *Meldau*, Z. VDI. (1932), S. 1189.
[3] DRP. Nr. 435171.

Re Reynoldsche Kennzahl,
η Zähigkeit der Luft,
Δp_l Druckverlust in der Meßdüse ohne Staubaufgabe,
Δp_s Druckverlust in der Meßdüse bei Staubaufgabe,
t Zeit.

Der Druckverlust soll als Differenz der statischen Drücke in den Meßkammern I und II vor und hinter der Düse aufgefaßt werden.

Vor der Düse ist die Staubgeschwindigkeit c_1 gleich der Luftgeschwindigkeit v_1. Beim Eintritt in die Düse steigt die Luftgeschwindigkeit plötzlich auf den Wert v_2, während das Staubkorn infolge seiner Massenträgheit zunächst noch seine ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten wird. Erst beim Durchlaufen der Bohrung erhöht sich allmählich die Staubgeschwindigkeit auf den Wert c_2 am Ende der Bohrung. Der sich hierbei ergebende Geschwindigkeitsverlauf ist in Abb. 1 dargestellt.

Wenn die Düse mit reiner Luft durchströmt wird, entsteht in der Düse ein gewisser Druckabfall, der durch die folgende Beziehung erfaßt werden kann:

$$\Delta p_l = \frac{v_2^2}{2g}\gamma_l + \lambda\frac{l}{d}\frac{v_2^2}{2g}\gamma_l, \text{ wobei } v_2 = \frac{4V}{d^2\pi}. \tag{1}$$

Der Druckverlust setzt sich aus dem Druckabfall am Einlauf und den Rohrreibungsverlusten im zylindrischen Teil der Bohrung zusammen.

Wir nehmen nun an, daß der Luft eine gewisse Menge Staub in der Zeiteinheit beigemengt werde. Der Staub möge nur aus Teilchen gleicher Korngröße bestehen. Die abgesaugte Luftmenge sei durch die Staubbeimengung nicht verändert worden. In diesem Fall wird zur Absaugung der Luft ein größeres Druckgefälle benötigt, da ein Teil des Druckgefälles zur Beschleunigung der Staubteilchen aufgewendet werden muß. Dieses zusätzlich benötigte Druckgefälle läßt sich wie folgt errechnen. Die Staubdichte im Abstand s vom Einlauf ergibt sich zu Gv/Vc. Das zur Beschleunigung der Staubteilchen auf der Wegstrecke ds aufzuwendende Druckgefälle ist somit gleich $(Gv/Vc)\frac{ds}{g}\frac{dc}{dt}$. Zu diesem Betrag kommt gegebenenfalls noch ein Beitrag, der durch die infolge Staubbeimengung erhöhte Wandreibung bedingt ist. Zur Berechnung dieses Anteiles werden die bewegten Staubteilchen als Gasstrom von der Geschwindigkeit c und der Dichte Gv/Vc aufgefaßt und der Druckverlust nach den bekannten Gesetzen des Druckverlustes in Rohrleitungen berechnet. Bezeichnet man den hierfür in Frage kommenden Rohrreibungsbeiwert mit λ', so findet man

$$\Delta p_s - \Delta p_l = \int_{c_1}^{c_2}\frac{G\,v}{V\,g}\,dc + \int_0^s \frac{\lambda'}{d}\frac{G\,c\,v}{2V\,g}\,ds. \tag{2}$$

Für die Meßdüse Abb. 1 kann praktisch $v = v_2 =$ konst. angenommen werden. Ferner sei der Rohrdurchmesser D im Vergleich zum Durchmesser d der Bohrung so groß gewählt worden, daß die Geschwindigkeiten v_1 und c_1 vernachlässigt und gleich 0 gesetzt werden können. In diesem Fall findet man

$$\Delta p_s - \Delta p_l = \frac{G\,v_2\,c_2}{V\,g} + \frac{\lambda'}{d}\frac{G}{V}\frac{v_2}{2g}\int_0^l c\,ds. \tag{3}$$

Setzt man $\int_0^l c\,ds = \varkappa\,c_2\,l$, wobei $\varkappa$ immer kleiner 1 sein muß, so ergibt sich

$$\Delta p_s - \Delta p_l = \frac{G\,v_2\,c_2}{V\,g}\left(1 + \frac{\lambda'}{d}\frac{l}{2}\,\varkappa\right). \tag{4}$$

Durch geeignete Wahl der Versuchsbedingungen wird man das Glied $\lambda' l\varkappa/2d$ vernachlässigbar klein machen können.

Wenn bei einem Versuch der zusätzliche Druckverlust bei Staubaufgabe $(\Delta p_s - \Delta p_l)$, außerdem die Größen V und G bestimmt worden sind, so kann mit Hilfe der Beziehung (4) die Staubgeschwindigkeit c_2 am Düsenaustritt errechnet werden. Aus der Größe der Staubgeschwindigkeit c_2 kann andererseits auf Größe und Widerstand der Staubteilchen geschlossen werden. Zur Berechnung dieser Zusammenhänge wird zunächst angenommen, daß der Staub aus kugeligen Teilchen vom Durchmesser f und vom Raumgewicht γ_s bestehen möge. Wendet man das Grund-

gesetz der Mechanik, daß Kraft gleich Masse mal Beschleunigung sein muß, auf die im Abstand s vom Düseneinlauf befindlichen Staubteilchen an, so findet man

$$\frac{dc}{dt}\,\frac{\pi}{6}\,\frac{f^3}{g}\,\gamma_s = a\,\frac{f^2\,\pi}{4}\,(v-c)^2\,\frac{\gamma_l}{2g}\,. \tag{5}$$

wobei

$$a = \varphi(Re) \quad Re = \frac{f(v-c)}{\eta}\,\gamma_l, \quad \frac{dc}{dt} = c\,\frac{dc}{ds}\,. \tag{6}$$

Setzt man für die Meßdüse Abb. 1 wieder $v = v_2 =$ konst. sowie $v_1 = c_1 = c_e \approx 0$ und löst Gleichung (5) nach s auf, so erhält man folgende Beziehung:

$$s = \frac{4}{3}\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,f\int_0^c \frac{c\,dc}{(v_2-c)^2\,a}\,. \tag{7}$$

Für sehr große *Reynolds*sche Kennzahlen ($Re > 1000$) kann $a = a' =$ konst. gesetzt werden. In diesem Fall erhält man für $c = c_2$ und $s = l$

$$l = \frac{4}{3}\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,\frac{f}{a'}\left(ln\,\frac{v_2-c_2}{v_2} + \frac{c_2}{v_2-c_2}\right). \tag{8}$$

Je feiner der aufgegebene Staub bei einer vorgegebenen Düse ist, um so größer wird das Geschwindigkeitsverhältnis c_2/v_2 und damit der zusätzliche Druckverlust $\Delta p_s - \Delta p_l$ bei Staubaufgabe.

3. Durchrechnung eines Beispieles. Die Versuchsbedingungen seien wie folgt gewählt worden:

$v_2 = 30$ m/s, $v_1 \approx 0$ m/s,
$\gamma_l = 1{,}22$ kg/m³, $\gamma_s = 3000$ kg/m³,
$d = 2$ mm, $D = 20$ mm, $l = 20$ mm,
$\lambda = 0{,}038$, $\lambda' = 0{,}02$, $\eta/\gamma_l = 0{,}145$ cm²/s,
$G = 0{,}2$ g/s, $V = 0{,}0945$ l/s.

Die Größe $\varkappa$ wird der Einfachheit halber konstant zu 0,7 angenommen. Für die Versuche mögen kugelige Teilchen Verwendung finden, deren Widerstandsbeiwerte[1] durch die folgenden Beziehungen gegeben seien:

Geschwindigkeitsverlauf in einer Meßdüse nach Abb. 1 für kugelige Teilchen verschiedener Größe bei $\gamma_s = 3000$ kg/m³ und $v = v_2 = 30$ m/s.

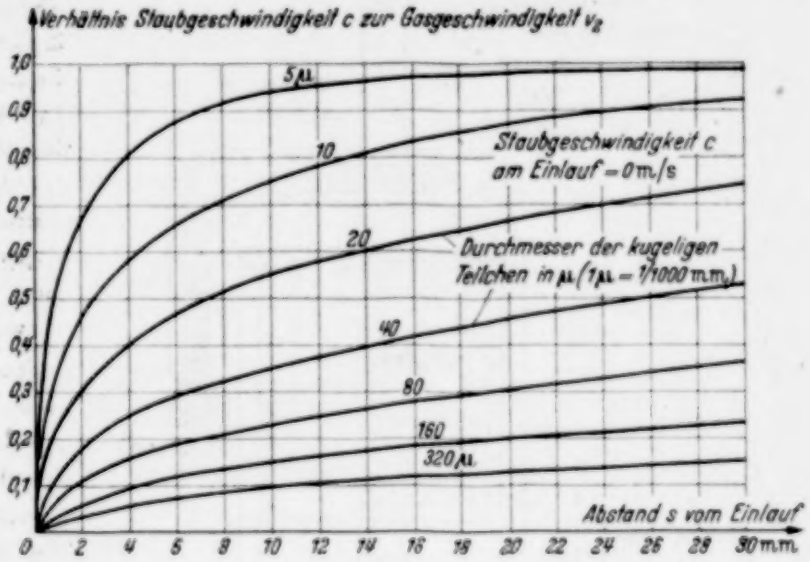


Abb. 2.

$$\left.\begin{aligned} a\,Re &= 24\left(1 + \frac{3}{16}\,Re\right) && (Re < 1)\,,\\ a\,Re &= \left(\sqrt{24} + \sqrt{0{,}08741\,Re^{1{,}5}}\right)^2 && (1 < Re < 8)\,,\\ a\,Re &= \left(\sqrt{24} + \sqrt{0{,}3\,Re}\right)^2 && (8 < Re < 300)\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Unter Verwendung der Beziehung (7) wurde das Geschwindigkeitsverhältnis c/v_2 als Funktion des Abstandes s vom Düseneinlauf graphisch ermittelt und in Abb. 2 aufgetragen. Für die Meßdüse ergeben sich folgende Verhältnisse:

Durchmesser f der kugeligen Teilchen in μ ($1\,\mu = {}^1/_{1000}$ mm)	Geschwindigkeitsverhältnis c_2/v_2 am Ende der Düse	Druckverlust Δp_s in der Düse in mm W.S. bzw. kg/m²
5	0,98	281
10	0,87	258
20	0,66	215
40	0,455	172
80	0,305	141
160	0,200	119
320	0,130	104
ohne Staubaufgabe		77,2

[1] *Gumz*, Feuerungstechnik Bd. 26 (1938), S. 253.

Die Rechnung zeigt den Anstieg des Druckverlustes bei gegebener Luftmenge und gegebenem Staubgewicht mit kleiner werdender Korngröße.

Bei sehr kleinen Korngrößen wird unter Umständen die Rechnungsvoraussetzung, daß $c_r = c_1 = r_1 \approx 0$, nicht mehr erfüllt sein, da das Staubkorn bereits bei seinem Eintritt in die Düse eine gewisse Geschwindigkeit erreicht haben wird. In diesem Fall ist Beziehung (4) nicht mehr gültig. An Hand der allgemeineren Beziehung (3) läßt sich nachweisen, daß in diesem Fall bei sehr, sehr kleinen Korngrößen eine Senkung der Druckverluste eintreten kann, wobei beim Grenzübergang zu $f=0$ der Druckverlust dem Wert $\Delta p_s - \Delta p_l = (G v_2^2/2gV)\left(1+\frac{\lambda'}{d}\frac{l}{2}\varkappa\right)$ zustreben muß. Um diese Erscheinung zu vermeiden, empfiehlt sich für Untersuchungen in diesem Bereich die Verwendung kurzer Düsen oder eines Trägermediums von geringerem Raumgewicht bzw. geringerer Zähigkeit.

4. Versuchsergebnisse. Zur Bestimmung der Staubfeinheit auf Grund der durchgeführten Überlegungen wurde die in Abb. 3 dargestellte Apparatur benutzt. Der Staub wird aus einem Behälter kontinuierlich dem Auffangtrichter A zugeführt, durch den Luft angesaugt wird. Wenn notwendig, muß der Staub vor der Aufgabe zerstäubt werden. Der staubführende Gasstrom passiert die Meßdüse B und anschließend ein Stoffilter, in welchem der Staub zurückgehalten wird. Der gereinigte Gasstrom gelangt durch die Meßblende C in das Absaugegebläse und von da ins Freie. Die Meßdüse B entspricht in ihrer Ausführung der Abb. 1. Die Meßblende C dient zur Bestimmung der Gasmenge. Durch eine Drosselklappe hinter dem Gebläse können verschiedene Gasmengen eingestellt werden.

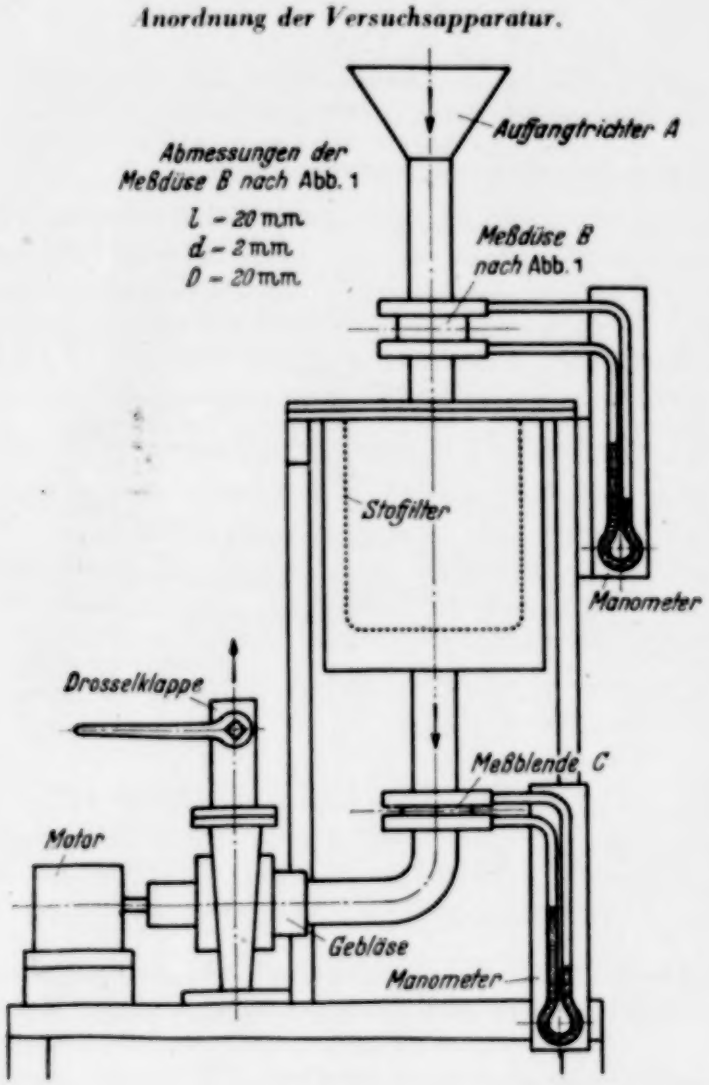


Abb. 3.

Vor Durchführung der eigentlichen Versuche wurde zunächst die Meßblende C mit einer Gasuhr geeicht. Anschließend wurden verschiedene Gasmengen ohne Staubaufgabe durch die Apparatur gesaugt und die Abhängigkeit des Druckverlustes Δp_l in der Meßdüse B von der Belastung mit Hilfe der Meßblende C festgestellt. Zur Durchführung der eigentlichen Feinheitsbestimmung wird während eines bestimmten Zeitraumes gleichmäßig Staub aufgegeben und die Anzeige der Meßdüse B und der Meßblende C während der Staubaufgabe beobachtet. Die Apparatur wird so eingestellt, daß möglichst keine Schwankungen in den Anzeigen während des Versuches auftreten. Durch Auswiegen des Filters vor und nach dem Versuch wird die aufgegebene Staubmenge ermittelt. Aus der Anzeige der Meßblende C ergibt sich die abgesaugte Luftmenge und aus den Anzeigen der Meßdüse B die Druckverluste mit und ohne Staubaufgabe.

Für die Versuche wurde Erzstaub, der in einem Zyklon abgeschieden worden war, verwendet. Der Staub war durch Aussieben in mehrere Fraktionen zerlegt worden. Zum Vergleich wurde auch eine Probe Gichtstaub aus einer Trockengasreinigung und eine Probe Zementstaub aus einer Entstaubungsanlage untersucht.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in Tafel 1 und in Abb. 4 zusammengestellt. Aus den Meßergebnissen wurde mit Hilfe der Beziehung (4) die Staubgeschwindigkeit c_2 am Ende der Düse errechnet, wobei der Wert $\gamma' l \varkappa / 2d$ mit 0,07 angenommen worden ist. Die gleichen Werte sind in Abschnitt B für kugelige Teilchen ermittelt worden. Es läßt sich jeder Staubsorte eine

gewisse Kugelgröße zuordnen, die in einer Meßdüse nach Abb. 1 bei gleicher Luftgeschwindigkeit v_2 die gleiche Teilchengeschwindigkeit am Düsenaustritt ergibt und somit widerstandsmäßig gleichwertig ist. Unter der Annahme eines analogen Verlaufes der Widerstandsbeiwerte für Staubteilchen und Kugeln, läßt sich auch die Fallgeschwindigkeit des Staubes in ruhender Luft bestimmen, indem man diese der Fallgeschwindigkeit der widerstandsmäßig gleichwertigen Kugel gleichsetzt. Die Fallgeschwindigkeit von Kugeln in ruhendem Gas errechnet sich aus Beziehung (5) wie folgt: $\frac{dc}{dt} = g, \quad v - c = w_f,$

$$w_f = \sqrt{\frac{4}{3}\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,\frac{g}{a}\,f}. \tag{10}$$

Auf diese Weise sind die in Tafel 1 für die einzelnen Staubsorten angegebenen Fallgeschwindigkeiten und gleichwertigen Kugeldurchmesser ermittelt worden.

Den untersuchten Staubsorten entspricht widerstandsmäßig ein Kugelteilchen des gleichen Raumgewichtes, dessen Durchmesser kleiner ist als die Maschenweite des Siebes, durch das das Staubkorn gerade noch durchfällt bzw. zurückgehalten wird. Bei großen Staubteilchen werden

Versuchsergebnisse mit der Apparatur nach Abb. 3.

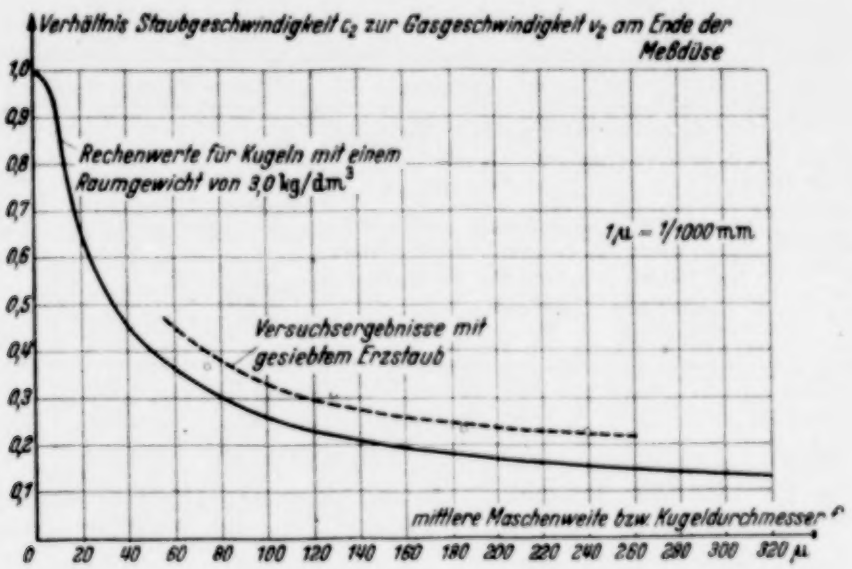


Abb. 4.

die Unterschiede größer. Die Gichtstaubprobe ergab die größte Feinheit, in einigem Abstand folgt die Zementstaubprobe. Bei dem Gichtstaub könnte allerdings das Ergebnis bereits durch die in Abschnitt *B* besprochenen Einflüsse verfälscht worden sein.

In Abb. 4 wurde das Geschwindigkeitsverhältnis c_2/v_2 für den untersuchten Staub in Abhängigkeit von der Korngröße, wie sie sich aus der Siebung ergeben hatte, aufgetragen. Der Verlauf ist ein ähnlicher wie bei den entsprechenden gerechneten Werten für die Kugeln, nur liegen die absoluten Werte höher, was auf den größeren Luftwiderstand der Staubteilchen zurückzuführen ist.

Die vorliegende Untersuchung sollte nur die grundsätzlichen Möglichkeiten dieses Verfahrens[1] aufzeigen. Bei der praktischen Anwendung müssen die Versuchsbedingungen und die Meßdüsenform der jeweiligen Aufgabe angepaßt werden. Für Staubgemische ergibt sich die Möglichkeit der Bestimmung eines Mittelwertes, der als Maß für die Feinheit des Staubes Verwendung finden kann. Bei vielen technischen Aufgaben z. B. bei der Bestimmung der Abscheideleistung von Staubabscheidern[2], [3], [4] besteht ein Bedürfnis nach einem derartigen Verfahren. Die beschriebene Methode hat den Vorzug, daß sie eine Messung am schwebenden Staubkorn gestattet und sich auch auf feinste Stäube anwenden läßt. Außerdem ist das Verfahren schnell und verhältnismäßig einfach zu handhaben.

[1] DRP. Nr. 660107.
[2] Fachausschuß für Staubtechnik: „Richtlinien für Leistungsversuche an Entstaubern". VDI.-Verlag 1936.
[3] *W. Barth*, Stahl und Eisen, 55 (1935), S. 1129/34.
[4] *W. Barth*, Arch. Wärmewirtschaft. 14 (1933), S. 267/69.

Tafel 1.

Bestimmung des Luftwiderstandes verschiedener Staubsorten.

Versuch Nr.	Material	Feinheit des Staubes: Durchfall durch Sieb mit Maschen pro cm²	Feinheit des Staubes: Rückstand auf Sieb mit Maschen pro cm²	Mittlere Maschenweite in μ	Abgesaugte Luftmenge V in l/s	Abgeschiedener Staub im Filter in g	Versuchsdauer in s	Staubgehalt in kg/m³ G/V
1	Erzstaub aus einem Zyklonabscheider	10000	—	—	0,0874	28,2	180	1,79
2		4900	10000	75	0,0850	33,6	180	2,19
3		1225	4900	130	0,0827	43,8	180	2,95
4		900	1225	185	0,0831	54,4	180	3,64
5		325	900	240	0,0831	56,2	180	3,77
6	Gichtstaub	10000	—	—	0,0965	1,99	180	0,115
7	Zementstaub	10000	—	—	0,0986	2,37	180	0,134

Versuch Nr.	Geschwindigkeit v_2 in der Düse in m/s	Druckabfall in der Meßdüse B: Δp_l ohne Staubaufgabe kg/m²	Druckabfall in der Meßdüse B: Δp_s mit Staubaufgabe kg/m²	Zusätzlicher Druckverlust bei Staubaufgabe $\Delta p_s - \Delta p_l$ kg/m²	Staubgeschwindigkeit c_2 am Ende der Meßdüse in m/s	Geschwindigkeitsverhältnis c_2/v_2	Widerstandsmäßig gleichwertiger Kugeldurchmesser f in μ	Fallgeschwindigkeit des Staubes in ruhender Luft w_f in m/s
1	27,0	65	125	60	11,0	0,395	52	0,23
2	27,1	61	125	64	9,9	0,360	60	0,29
3	26,3	58	125	67	7,95	0,302	80	0,47
4	26,5	59	125	66	6,28	0,236	116	0,78
5	26,5	59	125	66	6,09	0,230	120	0,81
6	30,7	85	94	9	23,4	0,764	14	0,018
7	31,7	90	98	8	17,5	0,558	27	0,066

Anmerkungen:

Meßdüse nach Abb. 1 mit $D = 20$ mm, $l = 20$ mm, $d = 2{,}0$ mm. — 1 μ entspricht $^1/_{1000}$ mm. — $\lambda' \, l \varkappa / 2d$ geschätzt zu 0,07. — $\gamma_s = 3$ kg/dm³.

(Eingegangen am 20. Januar 1947.)

Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte
(II. Mitteilung).

Von **K. Goriupp** in Graz.

1. Einleitung. Im Anschluß an die I. Mitteilung[1] wird im folgenden die dreiseitig gelagerte Platte bei Einspannung der gegenüberliegenden und aller drei Ränder untersucht. Der in einfachen trigonometrischen Reihen dargestellten Grundlösung w_0 der frei aufliegenden Platte (vgl. I. Mitteilung) wird dabei eine aus einer Reihensumme bestehende Zusatzlösung w_1 überlagert. Durchbiegung, Momente und Querkräfte ergeben sich dann als Summe aus der Grundlösung w_0 und der Zusatzlösung w_1. Während die Anteile aus der Grundlösung w_0, wie in der I. Mitteilung gezeigt wurde, fast durchweg durch geschlossene Formeln dargestellt werden können, konvergieren die Reihen der Zusatzlösung w_1 so gut, daß schon eine Entwicklung über wenige Reihenglieder Ergebnisse von vollständig ausreichender Genauigkeit liefert.

2. Lösungsansatz. a) Allgemeines. Bei Einspannung an mehreren Rändern muß der nach (10) der I. Mitteilung ermittelten Biegefläche, die im folgenden mit w_0 bezeichnet wird, noch eine weitere Fläche w_1 überlagert werden, die der homogenen Differentialgleichung (9) der I. Mitteilung genügt und mit w_0 zusammen die Randbedingungen erfüllt. Diese lautet bei Beibehaltung des bisherigen Achsenkreuzes (Abb. 3 der I. Mitteilung) in ihrer allgemeinen Form

$$\left.\begin{aligned} w_1 = &\sum_{1,3,5}^{\infty n} \cos n\pi\xi \left[A_n \operatorname{Sin} n\pi\eta + B_n\, n\pi\eta \operatorname{Sin} n\pi\eta + C_n\, n\pi\eta \operatorname{Cos} n\pi\eta\right] \frac{1}{n^2\pi^2 \operatorname{Cos} n\pi\lambda} + \\ &+ \sum_{1,3,5}^{\infty n} \sin \frac{n\pi\eta}{2\lambda} \left[D_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi\xi}{2\lambda} + E_n \frac{n\pi\xi}{2\lambda} \operatorname{Sin} \frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right] \frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2 \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{4\lambda}}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei die Faktoren $\frac{1}{n^2\pi^2 \operatorname{Cos} n\pi\lambda}$, $\frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2 \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{4\lambda}}$ nur zur Vereinfachung der Zahlenrechnung beigefügt sind. Die Konstanten A bis E sind den jeweiligen Randbedingungen anzupassen.

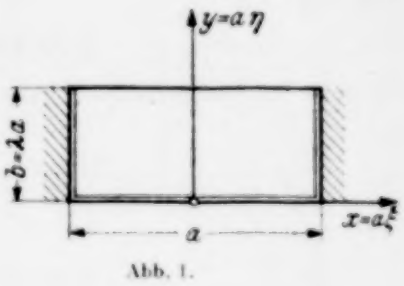


Abb. 1.

b) Gegenüberliegende Ränder eingespannt, gleichmäßige Belastung (Abb. 1). Als Grundlösung wird die dreiseitig frei aufliegende Platte gewählt. Die Zusatzlösung nimmt die Form

$$\left.\begin{aligned} w_1(\xi,\eta) = &\sum_{1,3,5}^{\infty n} \cos n\pi\xi \left[A_n \operatorname{Sin} n\pi\eta + C_n\, n\pi\eta \operatorname{Cos} n\pi\eta\right] \frac{1}{n^2\pi^2 \operatorname{Cos} n\pi\lambda} + \\ &+ \sum_{1,3,5}^{\infty n} \sin \frac{n\pi\eta}{2\lambda} \left[D_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi\xi}{2\lambda} + E_n \frac{n\pi\xi}{2\lambda} \operatorname{Sin} \frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right] \frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2 \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{4\lambda}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

an und erfüllt bereits die Randbedingungen

$$\text{für } \eta = 0: \quad w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = 0. \tag{3}$$

Die vier Konstanten sind den noch verbleibenden Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } \eta = \lambda: \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial \eta^3} + 2\frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^2 \partial \eta} = 0, \\ &\text{für } \xi = \pm\tfrac{1}{2}: \quad w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial w_0}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

anzupassen. Nach Ausführung der Differentiationen und Zusammenfassung erhält man die vier Bestimmungsgleichungen:

[1] *K. Goriupp*, Ing.-Arch. 16 (1947) S. 77.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1,3,5}^{\infty n}\cos n\pi\xi\left[A_n\operatorname{Tg} n\pi\lambda+C_n(2\operatorname{Tg} n\pi\lambda+n\pi\lambda)\right]-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\left[D_n\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}+\right.\\
&\qquad\left.+E_n\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right]\frac{1}{\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}}=0,\\
&A_n=C_n(1-n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda),\\
&D_n=-E_n\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda},\\
&+\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\left[A_n\operatorname{Sin} n\pi\eta+C_n n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\right]\frac{1}{\operatorname{Cof} n\pi\lambda}\pm\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{2\lambda}{n\pi}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\cdot\\
&\qquad\cdot E_n\left[\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1-\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)+\frac{n\pi}{4\lambda}\right]=-\frac{\partial w_0}{\partial\xi}.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Diese lassen sich noch weiter zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1,3,5}^{\infty n}\cos n\pi\xi\,C_n\left[\operatorname{Tg} n\pi\lambda(3-n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda)+n\pi\lambda\right]-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\;E_n\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right]\frac{1}{\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}}=0,\\
&+\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\;C_n\left[\operatorname{Sin} n\pi\eta(1-n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda)+n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\right]\frac{1}{\operatorname{Cof} n\pi\lambda}\pm\\
&\qquad\pm\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{2\lambda}{n\pi}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\;E_n\left[\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1-\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)+\frac{n\pi}{4\lambda}\right]=-\frac{\partial w_0}{\partial\xi}.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Um die einzelnen Glieder dieser Reihen miteinander vergleichen zu können, müssen nun auch die Ausdrücke

$$\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}-\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right],\tag{7}$$

$$\left[\operatorname{Sin} n\pi\eta(1-n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda)+n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\right],\qquad\frac{\partial w_0}{\partial\xi}\tag{8}$$

in cos- bzw. sin-Reihen von der Form

$$\left.\begin{aligned}
f(n,\xi)&=\sum_{1,3,5}^{\infty m}2\cos m\pi\xi\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}f(n,\xi)\cos m\pi\xi\,d\xi,\\
f(n,\eta)&=\sum_{1,3,5}^{\infty m}2\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\;\frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{2\lambda}f(n,\eta)\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\;d\eta
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

entwickelt werden. Die Integrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}f(n,\xi)\cos m\pi\xi\,d\xi$ **der einzelnen Glieder von (7) lauten:**

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi\,d\xi=\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2\lambda}\right)^2+(m\pi)^2}\left[\frac{n\pi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi+m\pi\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\sin m\pi\xi\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}=\\
&\qquad=\frac{2}{\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2+m^2}\;\frac{m}{\pi}\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}\sin\frac{m\pi}{2},
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\int\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi\,d\xi=\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2\lambda}\right)^2+(m\pi)^2}\left[\frac{n\pi}{2\lambda}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi+m\pi\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\sin m\pi\xi\right],\tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\sin m\pi\xi\,d\xi=\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2\lambda}\right)^2+(m\pi)^2}\left[\frac{n\pi}{2\lambda}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\sin m\pi\xi-m\pi\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}=\\
&\qquad=\frac{1}{\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2+m^2}\;\frac{n}{\lambda\pi}\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}\sin\frac{m\pi}{2}.
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{n\pi\xi}{2\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi\,d\xi &= \left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\int \mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi\,d\xi\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2+m^2}\times\\ &\times\frac{n}{2\lambda\pi}\left[\frac{n\pi}{2\lambda}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\cos m\pi\xi\,d\xi + m\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\sin m\pi\xi\,d\xi\right] = \frac{1}{\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2+m^2}\times\\ &\times\frac{nm}{2\lambda}\left\{\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi}{4\lambda} - \frac{2}{\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2+m^2}\,\frac{n}{\lambda\pi}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\right\}\sin\frac{m\pi}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Durch Zusammenfassung von (10) und (13) erhält man weiter

$$\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda} - \frac{n\pi}{4\lambda}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right] = -\sum_{1,3,5}^{\infty m}\cos m\pi\xi\,\frac{n^2}{\left(\frac{n^2}{4\lambda^2}+m^2\right)^2}\,\frac{2m}{\lambda^2\pi}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\sin\frac{m\pi}{2}\tag{14}$$

und in ähnlicher Weise

$$\left.\begin{aligned}\left[\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\,(1 - n\pi\lambda\,\mathfrak{Tg}\,n\pi\lambda) + n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\right] &= \sum_{1,3,5}^{\infty m}\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\,\frac{n}{\left(n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\times\\ &\times\frac{m^2}{\lambda^3\pi}\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Aus (32) bekommt man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w_0}{\partial\xi}\left(\pm\tfrac{1}{2},\eta\right) &= \mp\frac{4pa^4}{\bar{E}J}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{1}{n^4\pi^4}\left\{1 - \mathfrak{Cof}\,n\pi\eta + \tfrac{1}{2}\,n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta + \right.\\ &\left. + \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda + n\pi\lambda}\left[\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta\left(3\,\mathfrak{Sin}^2 n\pi\lambda - \tfrac{1}{2}(n\pi\lambda)^2\right) - \tfrac{3}{2}\,n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}^2 n\pi\lambda\right]\right\}\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

und durch Entwicklung gemäß (9) weiter

$$\left.\begin{aligned}2\cdot\frac{1}{2\lambda}\int_0^{\lambda} f(n,\eta)\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\,d\eta &= \frac{1}{2\lambda}\,\frac{1}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\left\{\frac{4\lambda}{m\pi}\left(n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}\right) - 2\left[\frac{n}{\pi}\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2} + \right.\right.\\ &\left. + \frac{m}{2\lambda\pi}\right] + \left[n^2\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2} - \frac{n}{\pi}\,\frac{1}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\left(\left(n^2-\frac{m^2}{4\lambda^2}\right)\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2} + \frac{nm}{\lambda}\right)\right] +\\ &+ \frac{6\,\mathfrak{Sin}^2 n\pi\lambda - (n\pi\lambda)^2}{3\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda + n\pi\lambda}\,\frac{n}{\pi}\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2} -\\ &\left. - \frac{3\,\mathfrak{Sin}^2 n\pi\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda + n\pi\lambda}\left[n^2\lambda\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2} - \frac{n}{\pi}\,\frac{n^2-\frac{m^2}{4\lambda^2}}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}\right]\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Nach Zusammenfassung folgt

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(n,\eta)\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\,d\eta = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{n^2}{\left(n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\left[\frac{4\lambda n^2}{m\pi} + \frac{m^2}{2\lambda}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}}{3\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda + n\pi\lambda}\right].\tag{18}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial\xi} = +\frac{4pa^4}{\bar{E}J}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sum_{1,3,5}^{\infty m}\frac{1}{\lambda n^2\pi^4}\,\frac{1}{\left(n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\left[\frac{4\lambda n^2}{m\pi} + \frac{m^2}{2\lambda}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}}{3\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\lambda + n\pi\lambda}\right]\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}.\tag{19}$$

Durch Einsetzen von (14), (15) und (19) in (6) ergibt sich nunmehr

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1,3,5}^{\infty n} C_n \left[\mathfrak{Tg}\, n\pi\lambda (3 - n\pi\lambda\, \mathfrak{Tg}\, n\pi\lambda) + n\pi\lambda\right] \cos n\pi\xi + \sum_{1,3,5}^{\infty n}\sum_{1,3,5}^{\infty m} \frac{2m}{\lambda^2\pi} \times \\
&\quad \times \frac{n^2}{\left(\frac{n^2}{4\lambda^2} + m^2\right)^2} \sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{m\pi}{2}\, E_n \cos m\pi\xi = 0\,, \\
&\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sum_{1,3,5}^{\infty m} \frac{m^2}{\lambda^3\pi^2} \frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2} \sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{m\pi}{2}\, C_n \sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda} + \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{2\lambda}{n\pi}\left[\mathfrak{Tg}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1 - \frac{n\pi}{4\lambda}\mathfrak{Tg}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n\pi}{4\lambda}\right] E_n \sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda} = \frac{4pa^4}{\bar{E}J} \sum_{1,3,5}^{\infty n}\sum_{1,3,5}^{\infty m} \frac{1}{\lambda\, n^2\pi^4} \frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2} \left[\frac{4\lambda n^2}{m\pi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{2\lambda} \frac{\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda \sin\frac{m\pi}{2}}{3\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda + n\pi\lambda}\right] \sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Schreibt man nun in den einfachen Reihen m für n, so erhält man zwei Identitäten, die nur dann erfüllt sind, wenn sie für jedes m befriedigt werden. Es ergeben sich auf diese Weise zwei Gleichungssysteme ähnlich denen, die *Hencky*[1] für die allseitig eingespannte Platte angegeben hat:

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_m C_m \sin\frac{m\pi}{2} + \sum_{1,3,5}^{\infty n} E_n \frac{n^2}{(n^2 + 4m^2\lambda^2)^2} \sin\frac{n\pi}{2} = 0\,, \\
&-\sum_{1,3,5}^{\infty n} C_n \frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2} \sin\frac{n\pi}{2} + \varepsilon_m E_m \sin\frac{m\pi}{2} = \frac{pa^4}{\bar{E}J} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{16\lambda^3}{m^3\pi^3} \sin\frac{m\pi}{2} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2} \left[1 + \frac{m^3\pi}{8\lambda^2} \frac{1}{n^2} \frac{\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda}{3\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda + n\pi\lambda} \sin\frac{m\pi}{2}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

für alle ungeraden m von $m=1$ bis $m=\infty$. Zur Abkürzung wurde hierbei gesetzt

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_m &= \frac{\pi}{32\, m\, \lambda^2} \left[\mathfrak{Tg}\, m\pi\lambda (3 - m\pi\lambda\, \mathfrak{Tg}\, m\pi\lambda) + m\pi\lambda\right]. \\
\varepsilon_m &= \frac{2\lambda^4\pi}{m^3} \left[\mathfrak{Tg}\,\frac{m\pi}{4\lambda}\left(1 - \frac{m\pi}{4\lambda}\mathfrak{Tg}\,\frac{m\pi}{4\lambda}\right) + \frac{m\pi}{4\lambda}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Für ein gegebenes Seitenverhältnis λ lassen sich aus (21) die Konstanten C und E berechnen. Dabei ist die Konvergenz der Reihen so gut, daß man sich auf wenige Werte beschränken kann.

Ersetzt man in (2) die Koeffizienten A und D durch C und E, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
w_1(\xi,\eta) = &\sum_{1,3,5}^{\infty n} \cos n\pi\xi\, C_n \left[n\pi\eta\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\eta + \mathfrak{Sin}\, n\pi\eta (1 - n\pi\lambda\, \mathfrak{Tg}\, n\pi\lambda)\right] \frac{1}{n^2\pi^2\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda} + \\
&+ \sum_{1,3,5}^{\infty n} \sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\, E_n \left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\, \mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda} - \frac{n\pi}{4\lambda}\mathfrak{Tg}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\, \mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right] \frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2\, \mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi}{4\lambda}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Aus (23) folgen für $\nu=0$ gemäß (4) bis (8) der I. Mitteilung die Momente

$$\left.\begin{aligned}
m_x^1 = \frac{\bar{E}J}{a^2} \Bigg\{ &\sum_{1,3,5}^{\infty n} \cos n\pi\xi\, C_n \left[n\pi\eta\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\eta + \mathfrak{Sin}\, n\pi\eta (1 - n\pi\lambda\, \mathfrak{Tg}\, n\pi\lambda)\right] \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda} - \\
&- \sum_{1,3,5}^{\infty n} \sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\, E_n \left[\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\left(2 - \frac{n\pi}{4\lambda}\mathfrak{Tg}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\right) + \frac{n\pi\xi}{2\lambda}\, \mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right] \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi}{4\lambda}} \Bigg\}, \\
m_y^1 = \frac{\bar{E}J}{a^2} \Bigg\{ &- \sum_{1,3,5}^{\infty n} \cos n\pi\xi\, C_n \left[n\pi\eta\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\eta + \mathfrak{Sin}\, n\pi\eta (3 - n\pi\lambda\, \mathfrak{Tg}\, n\pi\lambda)\right] \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda} + \\
&+ \sum_{1,3,5}^{\infty n} \sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\, E_n \left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\, \mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda} - \frac{n\pi}{4\lambda}\mathfrak{Tg}\,\frac{n\pi}{4\lambda}\, \mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right] \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi}{4\lambda}} \Bigg\}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

[1] *H. Hencky*, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. 1913.

die Auflagerdrücke

$$\left.\begin{aligned} a_x^1(\pm\tfrac{1}{2},\eta) &= +\frac{\bar{E}J}{a^3}\left\{\pm\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\,C_n\left[\operatorname{Sin} n\pi\eta\,(5-n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda)+n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\right]\frac{n\pi}{\operatorname{Cof} n\pi\lambda}\mp\right.\\ &\left.\mp\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\,E_n\left[\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1+\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)-\frac{n\pi}{4\lambda}\right]\frac{n\pi}{2\lambda}\right\}.\\ a_y^1(\xi,0) &= -\frac{\bar{E}J}{a^3}\left\{\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{n^2\pi^2\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda}{\operatorname{Cof} n\pi\lambda}\,C_n\cos n\pi\xi+\sum_{1,3,5}^{\infty n}E_n\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}+\right.\right.\\ &\left.\left.+\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\left(4-\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)\right]\frac{n\pi}{2\lambda\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}}\right\} \end{aligned}\right\}\quad(25)$$

und die Torsionsmomente

$$\left.\begin{aligned} m_{xy}^1(\pm\tfrac{1}{2},0) &= \pm\frac{\bar{E}J}{a^2}\left\{\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\,C_n\,\frac{2-n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda}{\operatorname{Cof} n\pi\lambda}-\sum_{1,3,5}^{\infty n}E_n\left[\frac{n\pi}{4\lambda}+\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1-\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)\right]\right\}.\\ m_{xy}^1(\pm\tfrac{1}{2},\lambda) &= \pm\frac{\bar{E}J}{a^2}\sum_{1,3,5}^{\infty n}2\,C_n\sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Aus Überlagerung von (24), (25) und (26) mit (40), (42), (45) und (47) der I. Mitteilung gewinnt man die endgültigen Werte für die Momente und Auflagerdrücke, die Einzelkräfte in den Ecken verschwinden dabei.

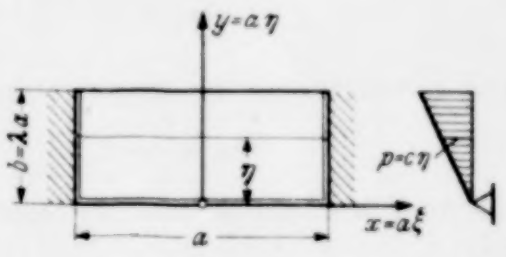


Abb. 2.

c) Gegenüberliegende Ränder eingespannt. Dreieckslast (Abb. 2). Gegenüber Abschnitt b) ändert sich nur der Ausdruck $\frac{\partial w_0}{\partial \xi}$ für den aus (50) der I. Mitteilung folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial\xi}\left(\pm\tfrac{1}{2},\eta\right) &= \mp\frac{4ca^4}{\bar{E}J}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{1}{n^5\pi^5}\left\{n\pi\eta+\frac{2}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda+n\pi\lambda}\left[n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\operatorname{Sin} n\pi\lambda-\right.\right.\\ &\left.\left.-\operatorname{Sin} n\pi\eta\,(n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda+2\operatorname{Sin} n\pi\lambda)\right]\right\}. \end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Durch Entwicklung von (27) gemäß (9) erhält man weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(n,\eta)\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\,d\eta &= \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{4\lambda^2 n}{m^2\pi}\sin\frac{m\pi}{2}+\frac{2\operatorname{Sin} n\pi\lambda}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda+n\pi\lambda}\times\right.\\ &\times\frac{1}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\left[n^2\lambda\operatorname{Sin} n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}-\frac{n^2-\frac{m^2}{4\lambda^2}}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\,\frac{n}{\pi}\operatorname{Cof} n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}\right]-\\ &\left.-\frac{2(n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda+2\operatorname{Sin} n\pi\lambda)}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda+n\pi\lambda}\,\frac{1}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\,\frac{n}{\pi}\operatorname{Cof} n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}\right\} \end{aligned}\right\}\quad(28)$$

und daraus durch Zusammenfassung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial\xi} &= +\frac{ca^4}{\bar{E}J}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sum_{1,3,5}^{\infty m}\frac{16}{\lambda\pi^6 n^4}\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}\sin\frac{m\pi}{2}\left\{\frac{2\lambda^2}{m^2}-\frac{1}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\times\right.\\ &\left.\times\frac{1}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda+n\pi\lambda}\left[n\pi\lambda+\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda\left(\frac{n^2-\frac{m^2}{4\lambda^2}}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}+2\right)\right]\right\}. \end{aligned}\right\}\quad(29)$$

Aus (20) und (29) folgt

$$-\sum_{1,3,5}^{\infty n} C_n \frac{1}{\left(n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\varepsilon_m E_m \sin\frac{m\pi}{2}=\frac{q a^4}{\bar{E} J}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{16\lambda^2}{m^2\pi^4 n^4}\left\{\frac{2\lambda^2}{m^2}-\frac{1}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda+n\pi\lambda\left[n\pi\lambda+\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda\left(\frac{n^2-\frac{m^2}{4\lambda^2}}{n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}}+2\right)\right]}\right\}. \tag{30}$$

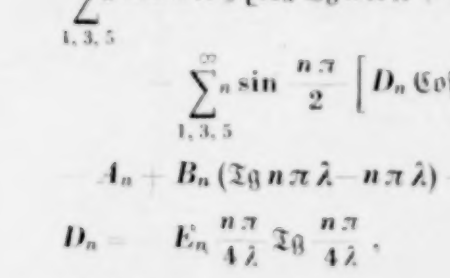


Abb. 3.

Mit (21) und (30) können nun für ein gegebenes Seitenverhältnis λ die Werte der Konstanten ermittelt werden. Durchbiegung, Momente und Querkräfte infolge der Randeinspannung erhält man aus (23) bis (26). Ihre endgültigen Größen folgen aus Überlagerung von (23) bis (26) mit (54) bis (64) der I. Mitteilung. Die Einzelkräfte in den Ecken verschwinden dabei.

d) Ränder eingespannt, gleichmäßige Belastung (Abb. 3). Als Grundlösung wird die dreiseitig frei aufliegende Platte gewählt. Die Zusatzlösung habe die Form

$$w_1=\sum_{1,3,5}^{\infty n}\cos n\pi\xi\left[A_n\operatorname{Sin} n\pi\eta+B_n n\pi\eta\operatorname{Sin} n\pi\eta+C_n n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\right]\frac{1}{n^2\pi^2}+$$
$$+\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\left[D_n\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}+E_n\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right]\frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2} \tag{31}$$

und erfüllt bereits die Randbedingung

$$\text{für } \eta=0: \qquad w_1=0. \tag{32}$$

Die fünf Konstanten sind den restlichen Randbedingungen

$$\begin{aligned}
&\text{für } \eta=0: && \frac{\partial w_1}{\partial\eta}=-\frac{\partial w_0}{\partial\eta},\\
&\text{für } \eta=\lambda: && \frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}=0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial\eta^3}+2\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi^2\,\partial\eta}=0,\\
&\text{für } \xi=\pm\tfrac{1}{2}: && w_1=0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial\xi}=-\frac{\partial w_0}{\partial\xi}
\end{aligned} \tag{33}$$

anzupassen. Nach Ausführung der Differentiationen und Zusammenfassung erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{1,3,5}^{\infty n}\cos n\pi\xi\left[A_n+C_n\right]\frac{1}{n\pi}+\sum_{1,3,5}^{\infty n}\left[D_n\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}+E_n\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right]\frac{2\lambda}{n\pi}=-\frac{\partial w_0}{\partial\eta},\\
&\sum_{1,3,5}^{\infty n}\cos n\pi\xi\left[A_n\operatorname{Tg} n\pi\lambda+B_n(2+n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda)+C_n(2\operatorname{Tg} n\pi\lambda+n\pi\lambda)\right]\operatorname{Cof} n\pi\lambda-\\
&\qquad-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\left[D_n\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}+E_n\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right]=0,\\
&A_n+B_n(\operatorname{Tg} n\pi\lambda-n\pi\lambda)+C_n(1-n\pi\lambda\operatorname{Tg} n\pi\lambda)=0,\\
&D_n=E_n\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda},\\
&+\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\left[A_n\operatorname{Sin} n\pi\eta+B_n n\pi\eta\operatorname{Sin} n\pi\eta+C_n n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\right]\frac{1}{n\pi}\pm\\
&\qquad\pm\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\left[D_n\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}+E_n\left(\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}+\frac{n\pi}{4\lambda}\right)\right]\frac{2\lambda}{n\pi}\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}=-\frac{\partial w_0}{\partial\xi}
\end{aligned} \tag{34}$$

und nach weiterer Zusammenfassung

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \cos n\pi\xi \left[B_n(\operatorname{Tg} n\pi\lambda - n\pi\lambda) + C_n(2 - n\pi\lambda \operatorname{Tg} n\pi\lambda)\right]\frac{1}{n\pi} + \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n E_n\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda} - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right]\frac{2\lambda}{n\pi} = -\frac{\partial w_0}{\partial \eta},\\
&\sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \cos n\pi\xi \left\{B_n(\operatorname{Tg}^2 n\pi\lambda + 2) + C_n\left[\operatorname{Tg} n\pi\lambda(3 - n\pi\lambda \operatorname{Tg} n\pi\lambda) + n\pi\lambda\right]\right\}\operatorname{Cof} n\pi\lambda - \\
&\qquad - \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \sin\frac{n\pi}{2} E_n\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda} - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right] = 0,\\
&\pm \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \sin\frac{n\pi}{2}\left\{B_n\left[n\pi\eta \operatorname{Sin} n\pi\eta + \operatorname{Sin} n\pi\eta(\operatorname{Tg} n\pi\lambda - n\pi\lambda)\right] + C_n\left[n\pi\eta \operatorname{Cof} n\pi\eta + \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + \operatorname{Sin} n\pi\eta(1 - n\pi\lambda \operatorname{Tg} n\pi\lambda)\right]\right\}\frac{1}{n\pi} \pm \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda} E_n\left[\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1 - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{n\pi}{4\lambda}\right]\frac{2\lambda}{n\pi}\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda} = -\frac{\partial w_0}{\partial \xi}.
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Aus (38) folgt

$$\frac{\partial w_0}{\partial \eta}(\xi, 0) = \frac{p a^4}{\bar{E} J}\sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \frac{2\cos n\pi\xi \sin\frac{n\pi}{2}}{n^4\pi^4}\,\frac{3\operatorname{Sin}^2 n\pi\lambda - (n\pi\lambda)^2}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda \operatorname{Cof} n\pi\lambda + n\pi\lambda}. \quad (36)$$

Wird nun noch der Ausdruck

$$\left[n\pi\eta \operatorname{Sin} n\pi\eta + \operatorname{Sin} n\pi\eta(\operatorname{Tg} n\pi\lambda - n\pi\lambda)\right] = f(n, \eta) \quad (37)$$

entsprechend (9) als sin-Reihe entwickelt, so ergibt sich

$$f(n,\eta) = \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_m \frac{m^2}{\lambda^3\pi}\,\frac{n}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\left[\operatorname{Sin} n\pi\lambda \sin\frac{m\pi}{2} - \frac{2n\lambda}{m}\right]\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}. \quad (38)$$

Mit (14), (15), (36) und (38) läßt sich (35) umformen in

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \frac{\cos n\pi\xi}{n\pi}\left[B_n(\operatorname{Tg} n\pi\lambda - n\pi\lambda) + C_n(2 - n\pi\lambda \operatorname{Tg} n\pi\lambda)\right] - \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_m \frac{4m}{\lambda\pi^2}\,\frac{n}{\left(\frac{n^2}{4\lambda^2} + m^2\right)^2} \times\\
&\qquad \times \sin\frac{m\pi}{2} E_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}\cos m\pi\xi = -\frac{p a^4}{\bar{E} J}\sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \frac{2\cos n\pi\xi \sin\frac{n\pi}{2}}{n^4\pi^4}\,\frac{3\operatorname{Sin}^2 n\pi\lambda - (n\pi\lambda)^2}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda \operatorname{Cof} n\pi\lambda + n\pi\lambda},\\
&\sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \cos n\pi\xi\left\{B_n(\operatorname{Tg}^2 n\pi\lambda + 2) + C_n\left[\operatorname{Tg} n\pi\lambda(3 - n\pi\lambda \operatorname{Tg} n\pi\lambda) + n\pi\lambda\right]\right\}\operatorname{Cof} n\pi\lambda + \\
&\qquad + \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_m \frac{2m}{\lambda^2\pi}\,\frac{n^2}{\left(\frac{n^2}{4\lambda^2} + m^2\right)^2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} E_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda}\cos m\pi\xi = 0,\\
&- \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_m \frac{m^2}{\lambda^3\pi^2}\,\frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\left\{B_n\left[\operatorname{Sin} n\pi\lambda \sin\frac{m\pi}{2} - \frac{2\lambda n}{m}\right] + \right.\\
&\qquad \left. + C_n \operatorname{Cof} n\pi\lambda \sin\frac{m\pi}{2}\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda} + \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \frac{2\lambda}{n\pi}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda} E_n\left[\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1 - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{n\pi}{4\lambda}\right]\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda} = \frac{4 p a^4}{\bar{E} J}\sum_{1,3,5}^{\infty}{}_n \sum_{1,3,5}^{\infty}{}_m \frac{1}{\lambda n^2\pi^4}\,\frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\left[\frac{4\lambda n^2}{m\pi} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{m^2}{2\lambda}\,\frac{\operatorname{Sin} n\pi\lambda \sin\frac{m\pi}{2}}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda \operatorname{Cof} n\pi\lambda + n\pi\lambda}\right]\sin\frac{m\pi\eta}{2\lambda}
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

und ähnlich wie bei Abschnitt b)

$$\left.\begin{aligned}
&B_m\,\bar\beta_m \sin\frac{m\pi}{2} + C_m\,\bar\gamma_m \sin\frac{m\pi}{2} - \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{n}{(n^2+4m^2\lambda^2)^2}\,E_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda} = \\
&\quad = -\frac{p\,a^4}{\bar E\,J}\,\frac{1}{32\,m^5\lambda^3\pi^2}\,\frac{3\operatorname{Sin}^2 m\pi\lambda - (m\pi\lambda)^2}{3\operatorname{Sin} m\pi\lambda\operatorname{Cof} m\pi\lambda + m\pi\lambda}, \\
&B_m\,\beta_m \sin\frac{m\pi}{2}\operatorname{Cof} m\pi\lambda + C_m\,\gamma_m \sin\frac{m\pi}{2}\operatorname{Cof} m\pi\lambda + \sum_{1,3,5}^{\infty n} E_n\,\frac{n^2}{(n^2+4m^2\lambda^2)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{Cof}\frac{n\pi}{4\lambda} = 0, \\
&-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{1}{\left(n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\left\{B_n\left[\operatorname{Sin} n\pi\lambda - \frac{2\lambda n}{m}\sin\frac{m\pi}{2}\right] + C_n\operatorname{Cof} n\pi\lambda\right\}\sin\frac{n\pi}{2} + E_m\,\varepsilon_m \sin\frac{m\pi}{2}\operatorname{Cof}\frac{m\pi}{4\lambda} \\
&\quad = \frac{p\,a^4}{\bar E\,J}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\frac{16\lambda^3}{m^3\pi^3}\,\frac{1}{\left(n^2+\frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}\left[1+\frac{m^3\pi}{8\lambda^2 n^2}\,\frac{\operatorname{Sin} n\pi\lambda\sin\frac{m\pi}{2}}{3\operatorname{Sin} n\pi\lambda\operatorname{Cof} n\pi\lambda + n\pi\lambda}\right]\sin\frac{m\pi}{2},
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

wobei $\beta_m, \gamma_m, \varepsilon_m$ und $\bar\beta_m, \bar\gamma_m$ gemäß (22) und (41) zu bestimmen sind:

$$\left.\begin{aligned}
\bar\beta_m &= \frac{\pi}{64\,m^2\lambda^3}(\operatorname{Tg} m\pi\lambda - m\pi\lambda), \\
\bar\gamma_m &= \frac{\pi}{64\,m^2\lambda^3}(2 - m\pi\lambda\operatorname{Tg} m\pi\lambda), \\
\beta_m &= \frac{\pi}{32\,m\lambda^2}(\operatorname{Tg}^2 m\pi\lambda + 2).
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Für ein gegebenes Seitenverhältnis λ lassen sich aus (40) nun wieder die Konstanten ermitteln, wobei mit Rücksicht auf die Konvergenz schon wenige Werte genügen. Aus (31) folgen mit (4) bis (8) der I. Mitteilung und $\nu = 0$ die Momente

$$\left.\begin{aligned}
m_x^1 &= \frac{\bar E\,J}{a^2}\left\{\sum_{1,3,5}^{\infty n}\cos n\pi\xi\,[A_n\operatorname{Sin} n\pi\eta + B_n\,n\pi\eta\operatorname{Sin} n\pi\eta + C_n\,n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta] - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\,E_n\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda} + \operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\left(2 - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)\right]\right\}, \\
m_y^1 &= \frac{\bar E\,J}{a^2}\left\{-\sum_{1,3,5}^{\infty n}\cos n\pi\xi\left[A_n\operatorname{Sin} n\pi\eta + B_n(2\operatorname{Cof} n\pi\eta + n\pi\eta\operatorname{Sin} n\pi\eta) + C_n(2\operatorname{Sin} n\pi\eta + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta)\right] + \sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\,E_n\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda} - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\right]\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

die Torsionsmomente

$$\left.\begin{aligned}
m_{xy}^1\left(\pm\tfrac{1}{2},0\right) &= \pm\frac{\bar E\,J}{a^2}\left\{\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\,[A_n + C_n] - \sum_{1,3,5}^{\infty n}E_n\left[\frac{n\pi}{4\lambda} + \operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1 - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)\right]\right\}, \\
m_{xy}^1\left(\pm\tfrac{1}{2},\lambda\right) &= \pm\frac{\bar E\,J}{a^2}\sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi}{2}\,[B_n\operatorname{Tg} n\pi\lambda + 2C_n]
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

und die Auflagerdrücke

$$\left.\begin{aligned}
a_x^1\left(\pm\tfrac{1}{2},\eta\right) &= \frac{\bar E\,J}{a^3}\left\{\pm\sum_{1,3,5}^{\infty n} n\pi\sin\frac{n\pi}{2}\,[A_n\operatorname{Sin} n\pi\eta + B_n(4\operatorname{Cof} n\pi\eta + n\pi\eta\operatorname{Sin} n\pi\eta) + \right. \\
&\quad \left. + C_n(4\operatorname{Sin} n\pi\eta + n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta)] \mp \sum_{1,3,5}^{\infty n}\sin\frac{n\pi\eta}{2\lambda}\,E_n\left[\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\left(1 + \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right) - \frac{n\pi}{4\lambda}\right]\frac{n\pi}{2\lambda}\right\}, \\
a_y^1(\xi,0) &= \frac{\bar E\,J}{a^3}\left\{-\sum_{1,3,5}^{\infty n} n\pi\cos n\pi\xi\,[A_n + 2C_n] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{1,3,5}^{\infty n}E_n\left[\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\operatorname{Sin}\frac{n\pi\xi}{2\lambda} + \operatorname{Cof}\frac{n\pi\xi}{2\lambda}\left(4 - \frac{n\pi}{4\lambda}\operatorname{Tg}\frac{n\pi}{4\lambda}\right)\right]\frac{n\pi}{2\lambda}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

e) Ränder eingespannt, Dreieckslast (Abb. 4). Gegenüber Abschnitt d) ändern sich nur die Ausdrücke für $\frac{\partial w_0}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial w_0}{\partial \eta}$. Der Ausdruck $\frac{\partial w_0}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}, \eta\right)$ ist durch (29) gegeben, für $\frac{\partial w_0}{\partial \eta}(\xi, 0)$ folgt aus (50) der I. Mitteilung

$$\frac{\partial w_0}{\partial \eta}(\xi, 0) = \frac{8\, c\, a^4}{\bar{E}\, J} \sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{\cos n\pi\xi \sin\frac{n\pi}{2}}{n^5 \pi^5} \left[\frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda + n\pi\lambda\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda}{3\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda + n\pi\lambda}\right]. \tag{45}$$

Durch Einsetzen von (29) und (45) in (39) erhält man die Bedingungsgleichungen. Durchbiegung, Momente und Querkräfte ergeben sich sinngemäß zu Abschnitt e).

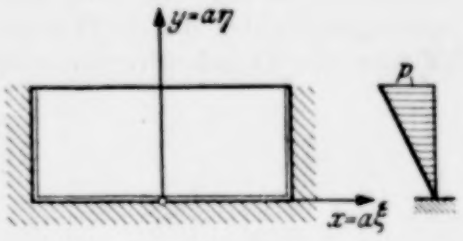


Abb. 4.

3. Einige Potenzreihen. In Gleichung (21) konvergiert das in der eckigen Klammer stehende Summenglied so rasch gegen 1, daß eine Teilsummierung der Reihen $\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}$, die selber wieder gegen die Reihe $\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{n^4} = 1{,}01467\ 803\ldots$ konvergieren, möglich ist. Für einige m und λ werden in Tafel 1 die Reihensummen auf acht Dezimalen angegeben.

Tafel 1.

λ	$\sum_{1,3,5}^{\infty n} \frac{1}{\left(n^2 + \frac{m^2}{4\lambda^2}\right)^2}$					
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$m=9$	$m=11$
0,50	0,26218960...	0,01451999...	0,00314163...	0,00114495...	0,00053876...	0,00029512...
0,75	0,49276804...	0,04775679...	0,01059603...	0,00386403...	0,00181814...	0,00099583...
1	0,65398253...	0,10460675...	0,02496013...	0,00915553...	0,00430940...	0,00236037...

4. Beispiele. a) Allgemeines. Die Auflösung vor (21), (30) und (35) bietet keine Schwierigkeiten, da die Reihenansätze gut konvergieren und schon wenige Glieder die Randbedingungen befriedigen. Es verbleibt also die Aufgabe, (21), (30) und (35) für steigendes n bzw. m zu entwickeln und aus diesen Gleichungen die erforderlichen Konstanten zu ermitteln. In den folgenden Beispielen sind die Konstanten so weit bestimmt, daß mit ihnen die Bedingungsgleichungen (4) und (33) auf 1 % genau erfüllt sind.

Wie zu erwarten war, ist der Einfluß des dritten Randes bei Einspannung der gegenüberliegenden Ränder nur gering. Die Verhältnisse nähern sich mit zunehmendem η rasch denen des Plattenstreifens. Der Einfluß des dritten Randes klingt bei $\eta = 0{,}75\ \lambda$ nahezu gänzlich ab. Auch hier entstehen die größten Momente an den Rändern, für die die Querdehnung keinen Einfluß hat.

b) Gegenüberliegende Ränder eingespannt, dritter Rand frei aufliegend, gleichmäßige Belastung (Abb. 1). Für $\lambda = 0{,}75$ erhält man aus (21) folgende Konstanten:

$$\left.\begin{array}{ll} C_1 = -0{,}00771 & E_1 = +0{,}04566 \\ C_3 = +0{,}00046 & E_3 = +0{,}00475 \\ C_5 = -0{,}00013 & E_5 = +0{,}00164 \\ C_7 = +0{,}00006 & E_7 = +0{,}00130 \end{array}\right\} \times \frac{p\, a^4}{\bar{E}\, J}.$$

Die mit diesen Werten errechneten Momente und Auflagerkräfte sind in Tafel 2 bzw. Abb. 5 zusammengestellt. Die Reihen (25) geben die Auflagerkräfte in den Ecken $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ und $(\pm\frac{1}{2}, \lambda)$, da sie dort absolut, aber nur schwach konvergent sind, mit den wenigen ermittelten Konstanten nicht genau wieder. Da die Werte in den Ecken bei nicht allzu schmalen Platten jedoch fast nur von den Randbedingungen der beiden dort zusammenstoßenden Ränder abhängen, können

sie von denen für $\lambda = \infty$ nur unwesentlich abweichen. Für $\lambda = \infty$ ergibt sich durch Differentiation und Grenzübergang aus der von *Tölke*[1] angegebenen Formel für die Durchbiegung der halbseitig eingespannten Platte

$$a_y\left(\pm\tfrac{1}{2}, 0\right) = \mp p a \sum_{1,3,5}^{\infty} n \frac{8}{n^2 \pi^2} = \mp p a . \tag{46}$$

während in der Ecke $\left(\pm\tfrac{1}{2}, \lambda\right)$ höchstens der Wert

$$a_x\left(\pm\tfrac{1}{2}, \lambda\right) = \mp \frac{p a}{2} \tag{47}$$

auftreten kann. Mit (46) und (47) zeichnet man nun die Querkraftslinien und beseitigt den geringen Fehler durch Flächen- und Momentenausgleich. Es ist dadurch möglich, auch in den Ecken die Querkräfte ausreichend genau darzustellen.

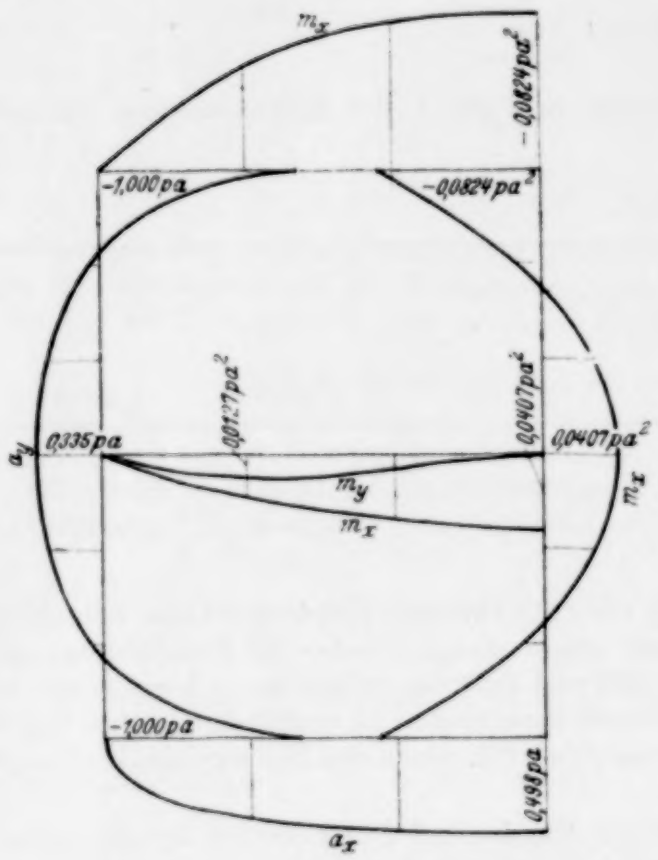


Abb. 3.

Tafel 2.

$\lambda = 0{,}75$	ξ	η	Anteil 0	Anteil 1	$\sum_0^1$	Faktor
m_x	0	λ	0,0826	−0,0419	0,0407	$p a^2$
	$\frac{1}{6}$		0,0744	−0,0468	0,0276	
	$\frac{1}{3}$		0,0482	−0,0605	−0,0123	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{\lambda}{3}$	—	−0,0548	−0,0548	
		$\frac{2\lambda}{3}$	—	−0,0785	−0,0785	
		λ	—	−0,0824	−0,0824	
m_y	0	$\frac{\lambda}{3}$	0,0384	−0,0163	0,0221	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,0658	−0,0306	0,0352	
	0	$\frac{\lambda}{3}$	0,0232	−0,0105	0,0127	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,0192	−0,0122	0,0070	
a_y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\lambda}{3}$	0,375	0,058	0,433	
		$\frac{2\lambda}{3}$	0,435	0,060	0,495	
		λ	0,366	0,132	0,498	
a_y	0	0	0,516	−0,181	0,335	$p a$
	$\frac{1}{6}$		0,479	−0,204	0,275	
	$\frac{1}{3}$		0,351	−0,289	0,062	
	$\frac{1}{2}$		—	−1,000	−1,000	

c) Drei Ränder eingespannt, gleichmäßige Belastung (Abb. 3). Für $\lambda = 1$ erhält man aus (35) folgende Konstanten:

$$\left.\begin{array}{lll} B_1 = +0{,}02595 & C_1 = -0{,}02628 & E_1 = +0{,}03323 \\ B_3 = +0{,}00362 & C_3 = -0{,}00362 & E_3 = +0{,}00024 \\ B_5 = -0{,}00155 & C_5 = +0{,}00155 & E_5 = +0{,}00004 \end{array}\right\} \times \frac{p a^4}{E J} .$$

[1] *F. Tölke*, Ing.-Arch. 5 (1934) S. 187.

Da für $n>1$ $B_n = -C_n$ ist, tritt nur A_1 auf:

$$A_1 = +0{,}00027 \frac{p a^4}{E J} .$$

Die mit diesen Werten errechneten Momente sind in Tafel 3 bzw. Abb. 6 zusammengestellt. Dabei ergibt sich das Einspannmoment in der Mitte des dritten Randes zu $m_y(0{,}0) = -0{,}0560\, p a^2$ und stimmt also mit dem von *Koepcke*[1] ermittelten Wert für den eingespannten Halbstreifen $m'_\eta = -0{,}0589\, p a^2$ gut überein. Für die Darstellung der Querkräfte wären noch einige weitere Konstanten erforderlich.

Tafel 3.

	$\lambda=1$	ξ	η	Anteil 0	Anteil 1	$\sum_0^1$	Faktor
m_x	$\frac{\lambda}{2}$	0	λ	0,1024	− 0,0614	0,0410	$p a^2$
		$\frac{1}{6}$	λ	0,0915	− 0,0631	0,0284	
		$\frac{1}{3}$	λ	0,0581	− 0,0708	− 0,0127	
		λ	$\frac{\lambda}{4}$	—	− 0,0340	− 0,0340	
			$\frac{\lambda}{2}$	—	− 0,0657	− 0,0657	
			$\frac{3\lambda}{4}$	—	− 0,0812	− 0,0812	
			λ	—	− 0,0832	− 0,0832	
		0	$\frac{\lambda}{4}$	0,0402	− 0,0290	0,0112	
			$\frac{\lambda}{2}$	0,0729	− 0,0438	0,0291	
			$\frac{3\lambda}{4}$	0,0917	− 0,0539	0,0378	
m_y		0	0	—	− 0,0560	− 0,0560	
		$\frac{1}{6}$	0	—	− 0,0476	− 0,0476	
		$\frac{1}{3}$	0	—	− 0,0316	− 0,0316	
		0	$\frac{\lambda}{4}$	0,0232	− 0,0205	0,0027	
			$\frac{\lambda}{2}$	0,0217	− 0,0128	0,0089	
			$\frac{3\lambda}{4}$	0,0133	− 0,0091	0,0042	

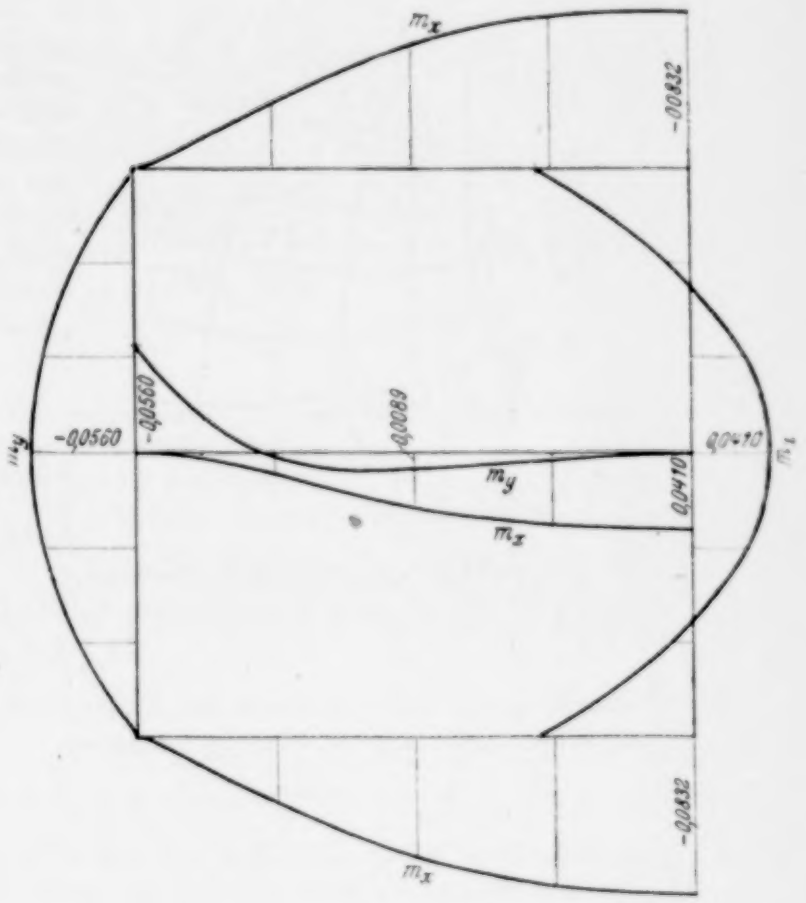


Abb. 6.

(Eingegangen am 16. Februar 1945.)

[1] *W. Koepcke*. Über das Randwertproblem an rechteckigen Platten. Diss. Berlin 1940.

Anwendung der Henckyschen Sätze über das Gleichgewicht in plastischen Körpern auf die technischen Formgebungsverfahren*.

Von **E. Siebel** in Stuttgart.

1. Einleitung. *L. Prandtl*[1] hat darauf hingewiesen, daß die von *H. Hencky*[2] abgeleiteten Sätze über die Eigenschaften der Gleitlinienscharen plastischer Körper für die Behandlung vieler Probleme des bildsamen Zustandes geeignet sind. Im folgenden soll der Versuch gemacht werden, mit Hilfe dieser Sätze ein Bild von den Beanspruchungsverhältnissen bei einer Reihe von technischen Formgebungsverfahren zu gewinnen.

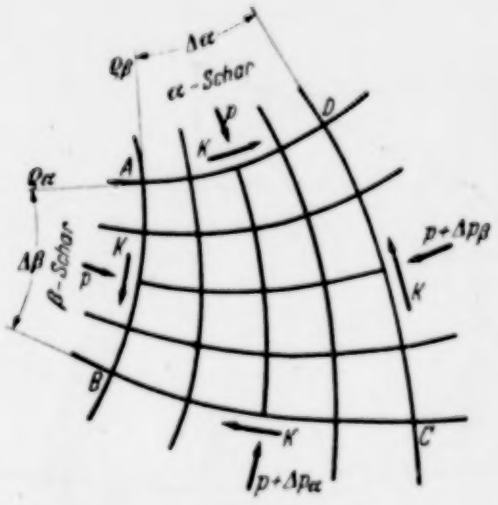


Abb. 1.

Die bildsame Verformung geht durch Verschiebungen in Gleitschichten vor sich, die mit der Richtung der größten Schubspannungen zusammenfallen. Bei eben verlaufenden Formänderungen bildet sich dabei ein Gleitliniennetz aus zwei aufeinander senkrecht stehenden Gleitschichtenscharen gemäß Abb. 1 aus. Wie *H. Hencky*[3] nachweisen konnte, läßt sich für die Änderung des mittleren Drucks p beim Fortschreiten von A nach B längs einer Gleitschicht der α-Schar bei gleichbleibendem Schubwiderstand $\varkappa$ durch Gleichgewichtsbetrachtungen die Beziehung ableiten

$$\Delta_{p\,a} = 2\varkappa\,\Delta\beta = k_f\,\Delta\beta\,. \tag{1}$$

$\Delta\beta$ bedeutet dabei den Winkel, um welchen sich die Normale auf die betrachtete Gleitschicht von A bis B dreht, während mit $k_f = 2\varkappa$ die als konstant angenommene Formänderungsfestigkeit bezeichnet ist. Entsprechend lautete die Beziehung beim Fortschreiten von A nach D längs einer Gleitschicht der β-Schar

$$\Delta_{p\,\beta} = 2\varkappa\,\Delta\alpha = k_f\,\Delta\alpha\,. \tag{2}$$

Gleichung (1) und (2) bieten die Möglichkeit, die Änderung des mittleren Drucks und somit auch die Änderung der Hauptspannungen

$$\sigma_1 = p + \frac{k_f}{2} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = p - \frac{k_f}{2} \tag{3}$$

in einfachster Weise zu bestimmen, sobald der Verlauf des Gleitliniennetzes bekannt ist. Durch das Gleitliniennetz sind gleichzeitig auch die Hauptspannungsrichtungen festgelegt, da die Hauptspannungstrajektorien überall um 45° geneigt zu den Gleitlinien verlaufen.

Wie von *H. Hencky*[3] weiterhin gezeigt wurde, bilden die Gleitschichten bei ebenen Problemen zwei sich rechtwinklig kreuzende Scharen, wobei die Tangenten, die an zwei Kurven der einen Schar in den Schnittpunkten mit jeder Kurve der zweiten Schar gelegt werden, überall den gleichen Winkel miteinander bilden. Kurvennetze, die diesen Bedingungen genügen, lassen sich nun unter Benutzung der von *L. Prandtl*[1] für den Verlauf der Krümmungsradien abgeleiteten Regeln leicht konstruieren. Die Form des Kurvennetzes ist dabei häufig durch die Randbedingungen eindeutig festgelegt. Wenn die Eindeutigkeit der Lösung fehlt, kann nach dem Vorschlage von *H. Hencky* der Lösung der Vorzug gegeben werden, welche die geringsten Kräfte liefert.

2. Stauchverfahren. Zunächst seien die Gleitliniennetze und Beanspruchungsverhältnisse bei einigen technischen Stauchproblemen untersucht. Von *L. Prandtl*[2] wurde eine Lösung gemäß

---

* Der ursprünglich für das *Prandtl* Heft 1945 der Z. VDI vorgesehene Aufsatz wurde inzwischen im J. Iron Steel Inst 34 (1947) S. 526 abgedruckt.

[1] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 401.

[2] *H. Hencky*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 241.

Abb. 2 für die Stauchung eines plastischen Körpers von geringer Höhe h zwischen ebenen und parallelen Druckplatten für den Fall angegeben, daß die Rauhigkeit der Preßflächen so groß ist, daß ein Gleiten des plastischen Stoffes entlang der Preßflächen verhindert ist. Die Schubspannung steigt alsdann an den Preßflächen auf $\tau = \frac{1}{2} k_f$ an. Demgemäß müssen die Gleitlinien einer Schar auf der einen Preßfläche senkrecht stehen und in die andere Preßfläche tangential einmünden, während die Gleitlinien der Gegenschar überall senkrecht hierzu verlaufen. Bei den Warmstauch-

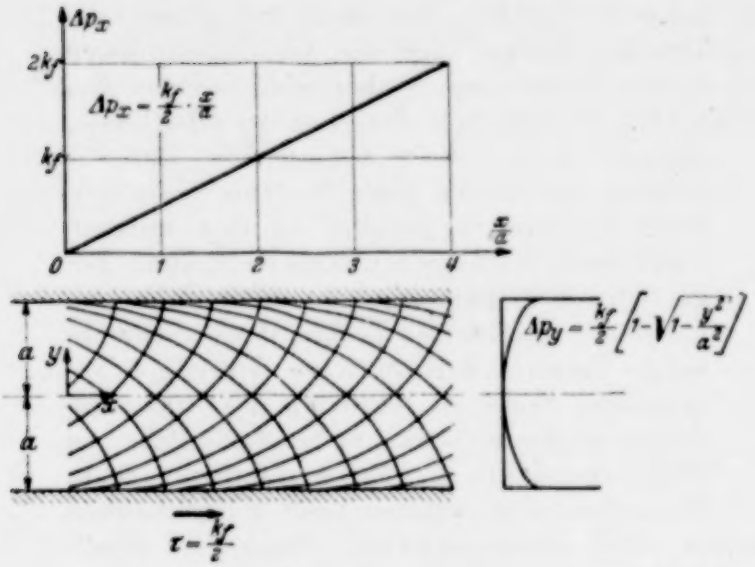


Abb. 2.

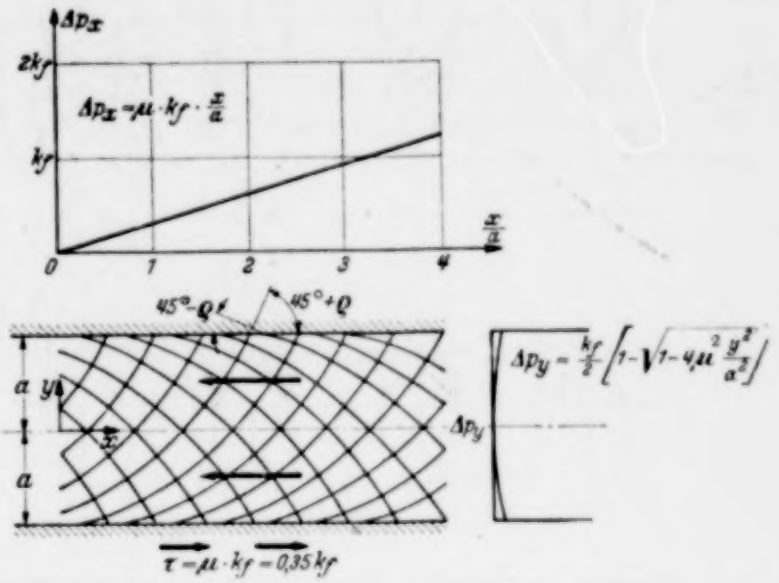


Abb. 3.

verfahren, z. B. beim Ausbreiten des Grates beim Gesenkschmieden, dürften die Reibungsverhältnisse meist dieser Voraussetzung entsprechen. Bei der Kaltstauchung, zumal wenn dieselbe unter Verwendung eines Schmiermittels vor sich geht, ist die Reibung an den Preßflächen jedoch geringer. Nimmt man an, daß die Schubspannung τ an den Preßflächen einen konstanten Wert $\mu\, k_f$ besitzt, so ergibt sich ein Gleitliniensystem gemäß Abb. 3, bei welchem die Gleitlinien an den Preßflächen überall unter dem Winkel $\alpha = \varrho + 45°$ bzw. $\beta = \varrho - 45°$ geneigt verlaufen ($\mu = \operatorname{tg} \varrho$). Die Gleitlinien bleiben dabei in gleicher Weise wie bei der von *Prandtl* angegebenen Lösung

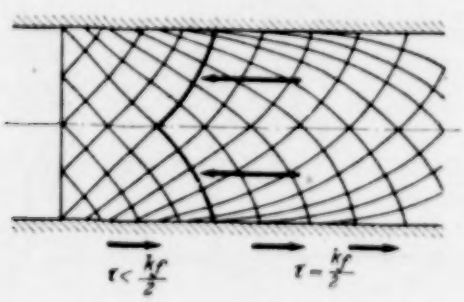


Abb. 4.

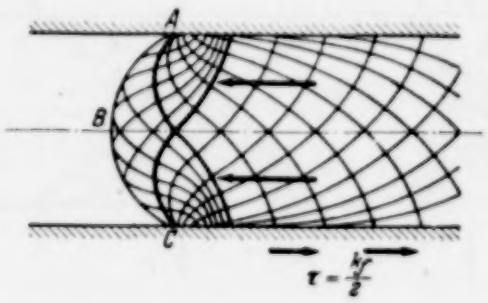


Abb. 5.

Zykloiden, und der mittlere Druck steigt proportional zum Abstand von der freien Fläche an. An den freien Flächen selbst müssen die Gleitlinien unter 45° zu diesen Flächen geneigt verlaufen. Den Zykloiden würde dabei eine konkav gekrümmte Endfläche entsprechen. Bleibt die Schubspannung an den Preßflächen nicht konstant, sondern wächst dieselbe stetig von 0 bis zu dem Höchstwert $\tau_{max} = \frac{1}{2} k_f$, so ergibt sich das in Abb. 4 gezeichnete Gleitliniennetz, bei welchem die Zykloiden in gerade Linien übergehen. Bei diesem Gleitliniensystem ist der bildsame Körper an der freien Fläche durch eine Ebene begrenzt. Steigt die Schubspannung an den Preßflächen plötzlich von 0 auf $\frac{1}{2} k_f$, so erhält man ein Gleitliniennetz gemäß Abb. 5. Die freie Fläche ABC ist in diesem Falle nach außen gewölbt. Eine derartige Ausbauchung der freien Fläche ist bei allen technischen Stauchvorgängen zu beobachten.

Die Gleitliniensysteme, welche beim Reckschmieden zur Ausbildung kommen, wobei eine schmale Zone des auszuschmiedenden Stabes der Druckwirkung zweier gegeneinander bewegter

Preßbahnen ausgesetzt sind, wurden von *F. Körber* und *E. Siebel*[1] eingehend experimentell untersucht. Dabei wurden Stäbe aus weichem Flußstahl unter schmalen Reckbahnen bis zum Einsetzen des Fließens belastet und die sich bildenden Gleitschichten durch Ätzung nach *Fry* sichtbar gemacht. In Abb. 6 ist das Vordringen der Gleitschichten mit zunehmender Druckwirkung schematisch dargestellt. An jeder der beiden Preßbahnen bildet sich zunächst getrennt ein Gleitschichtensystem aus, das aus zwei von den Stempelkanten ausgehenden Gleitlinienscharen besteht. Mit dem Anwachsen des Druckes breiten sich die Gleitlinienscharen immer weiter aus, wobei sich die von den beiden Preßflächen ausgehenden Gleitliniensysteme in der Weise beeinflussen, daß die äußeren Gleitlinien jedes Systems beim weiteren Vordringen parallel zu den äußeren Gleitlinien des Gegensystems verlaufen. Bezüglich der Spannungsverteilung läßt sich aus dem geschilderten Verlauf des Gleitliniennetzes folgern, daß im Kern derartig beanspruchter Stäbe in Richtung der Stabachse Zugspannungen wirksam sind, welche zu Materialtrennungen führen können. Beim Reckschmieden zwischen breiten Reckbahnen kommt es zu der durch Abb. 7 gekennzeichneten Gleitschichtenbildung. Derartige Fließerscheinungen sind während des Schmiedens auf den Seitenflächen der Stäbe als sogenannte Schmiedekreuze wahrzunehmen, indem in derartigen Zonen beim Einsetzen der Druckwirkung ein verstärktes Zunderabspringen und eine Temperaturerhöhung auftritt.

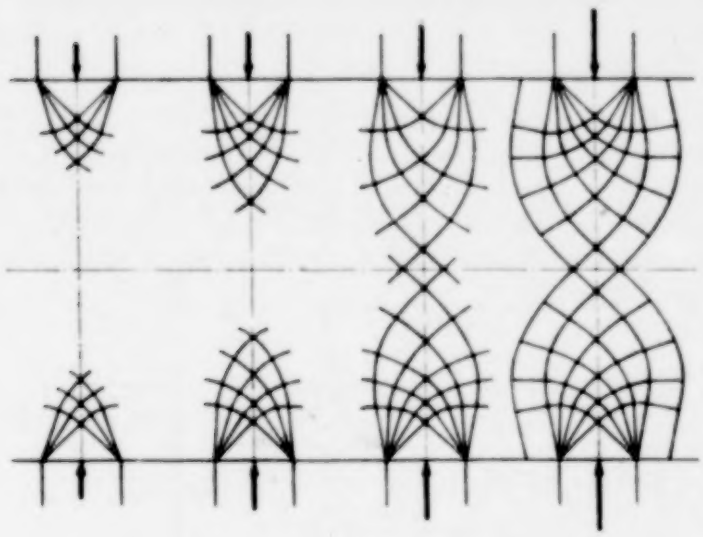


Abb. 6.

Sind beim Walzen mit kleinen Höhenabnahmen die Berührungsflächen zwischen den Walzen und dem Walzgut nur schmal im Vergleich zur Höhe des Walzgutes, so müssen sich die Beanspruchungsverhältnisse weitgehend denjenigen beim Schmieden mit schmalen Reckbahnen

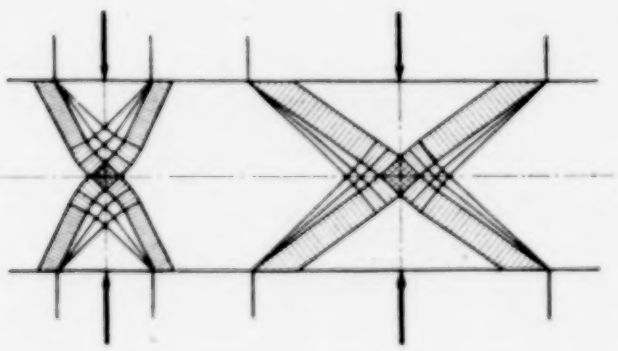


Abb. 7.

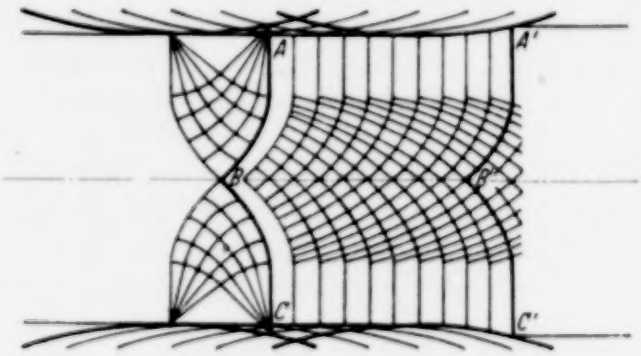


Abb. 8.

nähern. Entsprechend müssen auch die auftretenden Gleitschichtensysteme weitgehend mit denjenigen des Schmiedevorgangs übereinstimmen. Der Walzvorgang ist jedoch insofern vom einfachen Reckvorgang verschieden, als die Stauchgeschwindigkeit von einem Höchstwert an der Walzeneintrittsseite auf den Wert Null an der Austrittsseite absinkt. Es betätigen sich daher, wie in Abb. 8 schematisch dargestellt, vorwiegend die von der Eintrittskante ausgehenden Gleitschichten, wobei die Gleitschicht $A\,B\,C$ sich mit dem Fortschreiten der Walzung nach $A'\,B'\,C'$ vorwärtsschiebt bzw. sich immer aufs neue ausbildet. Bei einer derartigen Walzung vermag in gleicher Weise wie beim Reckvorgang die Druckwirkung nur unvollkommen in das Innere des Walzgutes vorzudringen. Zur Erzielung einer Tiefenwirkung ist es erforderlich, Walzendurchmesser und Höhenabnahme der Höhe des Walzgutes anzupassen.

[1] *E. Siebel* und *F. Körber*, Mitt. K. W. Inst. Eisenforsch. 10 (1928), S. 15.

3. Ziehverfahren. Die Gleitliniennetze können auch zur Untersuchung der Beanspruchungsverhältnisse bei den Ziehverfahren herangezogen werden, da hier in zahlreichen Fällen die Voraussetzung des ebenen Materialflusses mit guter Näherung erfüllt ist. Beim Tiefziehen wird z. B. die kreisförmige Blechronde gemäß Abb. 9a vom vorgehenden Ziehstempel über die Ziehkante nach innen gezogen und durch das Zusammenwirken von radialen Zugspannungen σ_r und tangentialen Druckspannungen σ_t verformt, wobei ein Ausbeulen durch den aufgesetzten Faltenhalter verhindert ist. Die Gleitschichten müssen gemäß Abb. 9b unter 45° zum Innen- und Außenrand geneigt verlaufen und entsprechen logarithmischen Spiralen. Da die Winkeländerung einer derartigen Spirale vom Außenrand mit dem Halbmesser R bis zu einem beliebigen Kreis mit

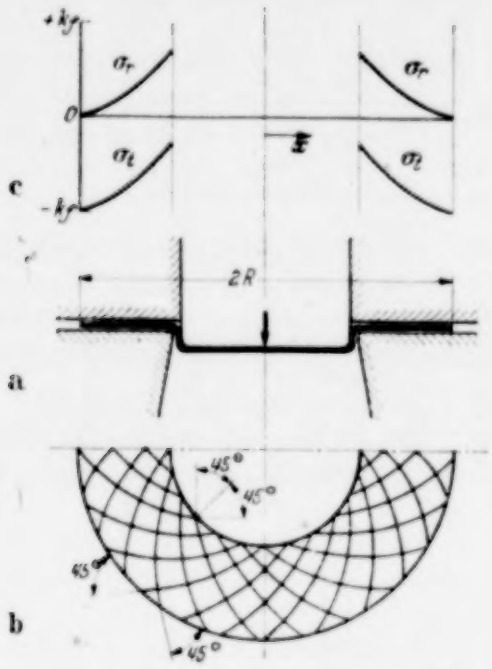


Abb. 9.

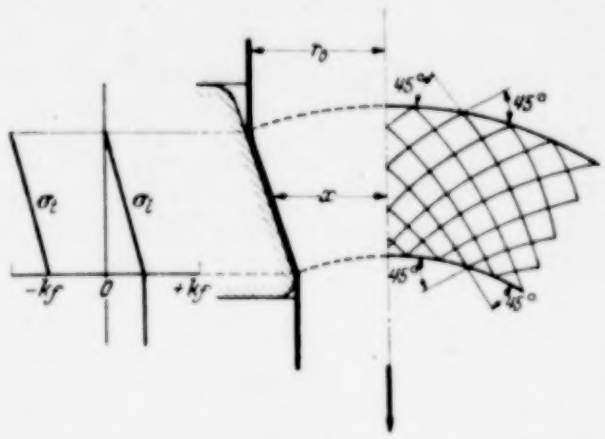


Abb. 10.

dem Halbmesser x dem natürlichen Logarithmus des Verhältnisses R/x entspricht, erhält man die Änderung des mittleren Druckes zu

$$\Delta p_x^R = k_f \ln \frac{R}{x} . \tag{4}$$

Damit ergeben sich für die Verteilung der Radialspannungen und Tangentialspannungen die Beziehungen (siehe Abb. 9c)

$$\sigma_r = k_f \ln \frac{R}{x} , \tag{5}$$

$$\sigma_t = k_f \left(\ln \frac{R}{x} - 1 \right) . \tag{6}$$

Die gleichen Beziehungen wurden von *E. Siebel* und *A. Pomp*[1] mit Hilfe einer Untersuchung des Kräftegleichgewichts an einem durch radial und tangential verlaufende Schnitte begrenzten Körperelement abgeleitet.

Die Beanspruchungsverhältnisse beim Rohrdruckzug entsprechen weitgehend denjenigen beim Tiefziehen, wobei an die Stelle der ebenen kreisförmigen Blechronde der kegelförmige Teil der Rohrwand in der Ziehdüse tritt. Auch hier bildet sich, wenn man die Schubspannungshypothese zugrunde legt, in der Mantelfläche des Rohres in der Ziehdüse gemäß Abb. 10 ein Gleitschichtensystem von logarithmischen Spiralen aus, wobei die Verformung unter der Wirkung der Zug-Längsspannungen und Druck-Umfangsspannungen vor sich geht, ohne daß die Wanddicke sich wesentlich ändert. Die Längsspannung steigt dabei von 0 am Düseneintritt (Ausgangshalbmesser r_0) auf

$$\sigma_1 = k_f \ln \frac{r_0}{x} \tag{7}$$

an einer Stelle mit dem Halbmesser x an, während die Tangentialspannung sich in gleicher Weise wie beim Tiefziehen zu

$$\sigma_t = k_f \left(\ln \frac{r_0}{x} - 1 \right) \tag{8}$$

[1] *E. Siebel* und *A. Pomp*, Mitt. K. W. Inst. Eisenforsch. 11 (1929), S. 139.

ergibt. Die Radialspannung an der Düsenwand läßt sich mit Hilfe einer einfachen Gleichgewichtsbetrachtung berechnen zu

$$\sigma_r \approx \sigma_l \frac{s}{r}, \tag{9}$$

wenn mit s die Wanddicke des Rohres bezeichnet ist[1].

Beim Ziehen von Bändern durch eine rechteckige Düse, wobei die Bandbreite erhalten bleibt, während sich die Dicke d entsprechend vermindert, müssen die Gleitschichten unter 45° zur

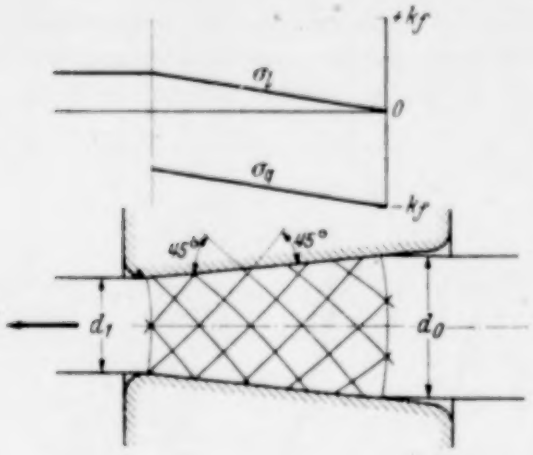


Abb. 11.

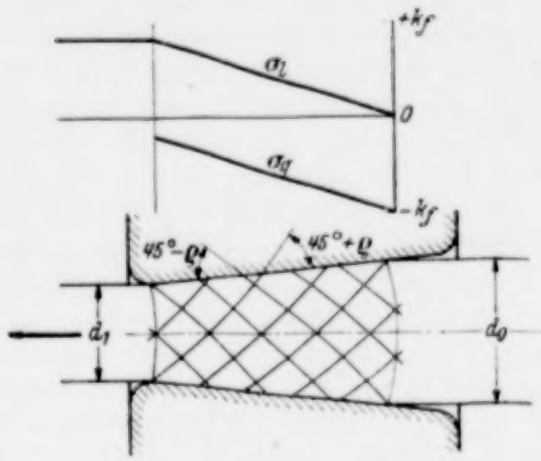


Abb. 12.

Düsenwand geneigt verlaufen, wenn man die Reibung an der Ziehdüsenwand und die besonderen Verhältnisse, die durch den Materialzusammenhang am Düseneintritt und -austritt bedingt sind, vernachlässigt. Bei gleichbleibendem Düsenwinkel erhält man alsdann ebenfalls ein Gleitliniennetz von log. Spiralen gemäß Abb. 11. Damit ergibt sich die Zug-Längsspannung zu

$$\sigma_l = k_f \ln \frac{d_0}{d}, \tag{10}$$

während sich die Druckquerspannung zu

$$\sigma_q = k_f \left(\ln \frac{d_0}{d} - 1 \right) \tag{11}$$

berechnen läßt. Es besteht auch die Möglichkeit, die Ziehdüsenreibung ϱ in einfacher Weise zu berücksichtigen. Die Spiralen stehen alsdann gemäß Abb. 12 an der Düsenwandung unter $\varrho + 45°$ zur Normalen auf die Düsenwand geneigt, wodurch sich eine stärkere Krümmung der Gleitlinien und eine entsprechend vergrößerte Längsspannung bei gleichzeitigem Absinken der Druckquerspannung ergibt. Wird die Düsenlänge im Verhältnis zur Banddicke sehr klein, wie dies bei kleinen Zugabnahmen und steiler Ausbildung der Ziehdüse der Fall ist, so wirkt sich der Materialzusammenhang an beiden Enden der Ziehdüse in starkem Maße auf die Beanspruchungsverhältnisse aus. Das Gleitschichtensystem dürfte alsdann gemäß Abb. 13 weitgehend demjenigen entsprechen, das sich beim Schmieden zwischen schmalen Reckbahnen ausbildet. In diesem Falle muß mit einer ungleichförmigen Spannungsverteilung und mit erhöhten Zugspannungen in der Mitte des Querschnitts gerechnet werden.

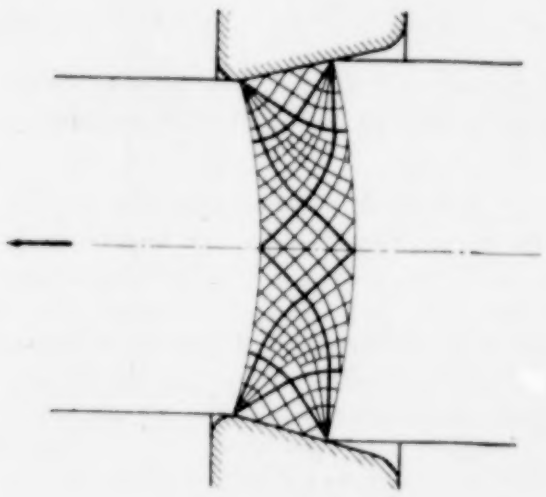


Abb. 13.

4. Preßverfahren. Neben den Stauch- und Ziehverfahren erscheinen die Preßverfahren, insbesondere das Strangpressen und Lochen von technischer Bedeutung. Im folgenden ist der Versuch gemacht, mit Hilfe der Gleitliniennetze auch in die verwickelten Beanspruchungsverhält-

[1] Vgl. *E. Siebel* und *E. Weber*. Mitt. K. W. Inst. Eisenforsch. 16 (1934). S. 217.

nisse, die bei diesen Verfahren auftreten, einen Einblick zu gewinnen, wobei die Untersuchung wiederum auf das ebene Verformungsproblem beschränkt bleiben muß.

Beim Strangpreßverfahren kann zunächst einmal angenommen werden, daß sich gemäß Abb. 14 ein aus logarithmischen Spiralen aufgebautes Gleitliniennetz ausbildet, wobei die Verformungszone die Düsenöffnung halbkreisförmig umschließt und sich bis an die Aufnehmerwandung erstreckt. Dabei würden die radial zum Düsenmittelpunkt gerichteten Druckspannungen von dem Werte 0 im austretenden Strang bis auf den Wert $p = k_f \ln (d_0/d_1)$ im Abstand $\frac{1}{2} d_0$ ansteigen, wobei mit d_0 die Dicke des Ausgangsquerschnittes und mit d_1 die Dicke des Endquerschnittes bezeichnet ist. Außerhalb der Verformungszone ist im Ausgangsblock nach allen Seiten der Druck p wirksam. Die erforderliche Preßkraft ergibt sich bei einem Blockquerschnitt F_0 entsprechend zu

$$P = F_0 \, k_f \ln \frac{d_0}{d_1} . \tag{12}$$

Kraftmessungen, die bei Preßversuchen von *E. Siebel* und *E. Fangmeier*[1] mit Weichblei durchgeführt wurden, ergaben, daß P sich proportional zu dem natürlichen Logarithmus des Verhältnisses von Ausgangs- und Endquerschnitt ändert. Das eingezeichnete Gleitliniensystem muß daher den wirklichen Beanspruchungsverhältnissen ziemlich nahe kommen.

Es besteht jedoch auch die Möglichkeit zur Ausbildung des in Abb. 15 dargestellten Gleitschichtensystems. Dasselbe entspricht den Verhältnissen, wie sie von *Hencky*[2] und *Prandtl*[3] beim Eindringen einer Schneide in einen Halbraum als maßgebend angenommen wurden, mit dem

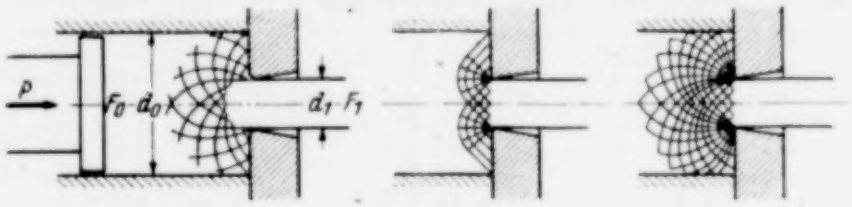


Abb. 14. Abb. 15. Abb. 16.

Unterschied, daß der Materialfluß in entgegengesetzter Richtung vor sich geht. Bei diesem Gleitliniennetz verlaufen die Hauptspannungstrajektorien in der Austrittsöffnung parallel zur Systemachse. Der Materialfluß erfolgt entsprechend an dieser Stelle in parallel zur Achse gerichteten Stromröhren, während bei dem in Abb. 14 dargestellten Gleitliniensystem der Materialfluß überall nach der Düsenmitte hin gerichtet ist. Das letztgenannte Gleitliniennetz ist außerdem mit den Reibungsbedingungen an der Stirnwand des Aufnehmers nicht in Einklang zu bringen. Erfahrungsgemäß liegt der Werkstoff von der Düsenkante bis zur Aufnehmerwandung in einem toten Winkel und beteiligt sich nicht an der Verformung, wobei die Grenze zum verformten Gebiet einer Gleitschicht entsprechen muß. Auf der anderen Seite ist damit zu rechnen, daß das Verformungsgebiet sich über die in Abb. 15 eingezeichneten Grenzen hinaus in den Ausgangsblock erstreckt.

Unter Berücksichtigung der vorstehend geschilderten Verhältnisse dürfte das wirkliche Gleitschichtensystem beim Strangpressen etwa der Darstellung in Abb. 16 entsprechen. Die Preßkraft P ergibt sich nunmehr zu

$$P \approx (F_0 - F_1) \, k_f (1 + \alpha) = F_0 \frac{d_0 - d_1}{d_0} \, k_f (1 + \alpha) . \tag{13}$$

wobei der Umlenkungswinkel α bei kleinen Querschnittsabnahmen $< \pi/2$, bei großen Querschnittsabnahmen aber $> \pi/2$ sein dürfte. Bezüglich des Materialflusses läßt sich aus der Gestalt der Verformungszone schließen, daß beim Vorrücken des Blockes die in der Nähe der Stabachse gelegenen Teile eines Blockquerschnitts zuerst mit der Verformung beginnen. Die ursprünglich ebenen Querschnitte sind daher im austretenden Strang stark verworfen, wobei die Mittelzone den Randzonen vorauseilt.

---

[1] *E. Siebel* und *E. Fangmeier*. Mitt. K. W. Inst. Eisenforsch. 13 (1931). S. 29.
[2] *H. Hencky*. Z. angew. Math. Mech. 3 (1923). S. 241.
[3] *L. Prandtl*. Z. angew. Math. Mech. 3 (1923). S. 401.

Beim Lochvorgang kommt die Ausbildung eines aus logarithmischen Spiralen bestehenden Gleitschichtensystems gemäß Abb. 17 nicht in Frage, da das verdrängte Material bei dieser Art der Beanspruchung nicht parallel zur Achse des Lochstempels abfließt. Durch ein Gleitliniensystem nach Abb. 18 wird dieser Bedingung Genüge geleistet. Auch hier kann jedoch angenommen werden, daß sich die Verformungszone über die in Abb. 18 eingezeichneten Grenzen hinaus erstreckt. Das unmittelbar vor dem Lochstempel befindliche Material nimmt wiederum an der Verformung nicht teil. Schließlich bewirkt die Reibung des aufsteigenden Werkstoffes an der Aufnehmerwandung, daß der Umlenkungswinkel a den Wert von $\pi/2$ um die Größe des Reibungswinkels ϱ übersteigt. Den wirklichen Beanspruchungsverhältnissen dürfte daher ein Gleitschichtensystem gemäß Abb. 19 am besten entsprechen. Die Lochkraft P ergibt sich dabei zu

$$P = f k_f \left(1 + \frac{\pi}{2} + \varrho\right). \tag{14}$$

Bei Lochversuchen mit Weichblei wurde von *Siebel* und *Fangmeier*[1] im Einklang mit den vorstehenden Ausführungen in weiten Grenzen ein gleichbleibender bezogener Dorndruck P/f von 8,7—9,1 kg/mm² festgestellt.

Um eine möglichst klare Vorstellung über die Beanspruchungsverhältnisse zu gewinnen, ist in Abb. 20 und 21 der Verlauf der Hauptspannungstrajektorien beim Strangpressen und Lochen dargestellt, der den Gleitliniennetzen in Abb. 16 und 19 entspricht und die Größe der Hauptspannungen an jeder Stelle des Trajektorienfeldes auf Grund der eingangs gegebenen Beziehungen ermittelt. Wie Abb. 20a erkennen läßt, verlaufen die σ_2-Linien (Querspannungen) zu-

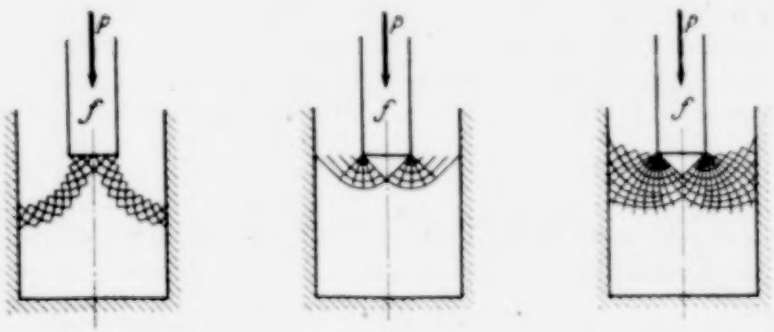


Abb. 17. Abb. 18. Abb. 19.

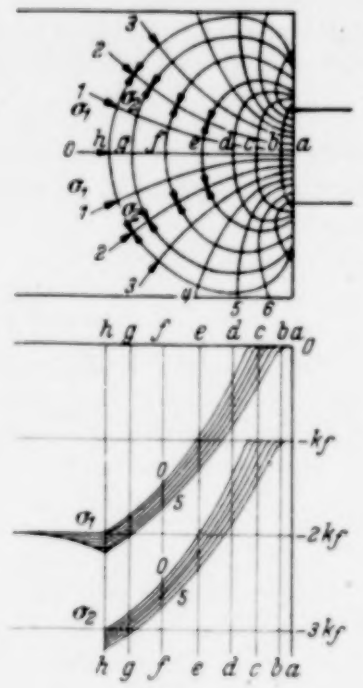


Abb. 20.

nächst beim Strangpressen in einigem Abstand von der Düsenöffnung nahezu kreisförmig, während die σ_1-Trajektorien (Längsspannung) zunächst radial zur Düsenmitte gerichtet sind und in der Nähe der Düsenöffnung in die Richtung der Achse des austretenden Stranges umbiegen. Die Druckspannung σ_1 ist im austretenden Strang, wenn von etwaigen Eigenspannungen abgesehen wird, gleich 0 und steigt gemäß Abb. 20b nahezu in allen Stromröhren in gleicher Weise bis auf das Doppelte der Formänderungsfestigkeit k_f an. In der Querrichtung (σ_2-Richtung) wirken Druckspannungen, welche die σ_1-Spannungen noch um den Wert der Formänderungsfestigkeit übertreffen. Der Spannungszustand entspricht also ungefähr demjenigen einer halbkreisförmigen Gewölbekappe, die über die Düsenöffnung gespannt und mit dem radial wirkenden Druck σ_1 belastet ist.

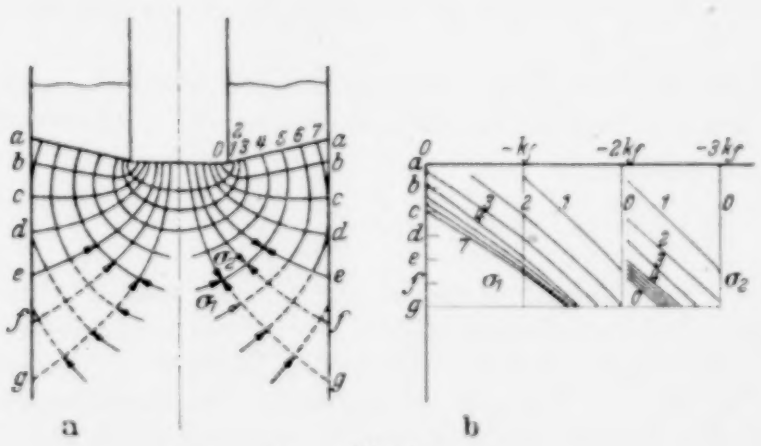


Abb. 21.

Beim Lochen verlaufen die σ_1-Trajektorien gemäß Abb. 21 nahezu kreisförmig um die Stirnfläche des Stempels, während die σ_2-Trajektorien radial vom Stempel zur Düsenwand ausstrahlen.

[1] *E. Siebel* und *E. Fangmeier*, Mitt. K. W. Inst. Eisenforsch. 13 (1931), S. 29.

Vor dem Stempel herrscht in der σ_2-Richtung eine Druckspannung von der dreifachen Höhe der Formänderungsfestigkeit. Längs der Trajektorien *a*, *b* und *c* nimmt diese Spannung bis auf $-k_f$ an der Außenwand ab. Auf den Trajektorien *d*, *e*, *f*, *g* ist der Abfall geringer. In der σ_1-Richtung herrscht in dem aufsteigenden Material, wenn man wiederum von den rein elastischen Verspannungen absieht, die Spannung 0. Längs der σ_1-Trajektorien steigt die Druckspannung allmählich an und erreicht unmittelbar vor dem Lochstempel den Wert $-2k_f$.

Zur genauen Bestimmung der Spannungsverteilung wäre es erforderlich, auch die rein elastisch beanspruchten Gebiete mit in die Untersuchung einzubeziehen. Nur auf diese Weise ist es möglich, die Grenzen des bildsam beanspruchten Gebietes einwandfrei festzulegen. Im übrigen dürfte die Spannungsverteilung in den der Verformungszone benachbarten Gebieten meist nur wenig von derjenigen abweichen, die auf Grund der *Henck*yschen Sätze ermittelt wird. Die vorstehend gegebenen Beispiele zeigen auf jeden Fall, daß das geschilderte Untersuchungsverfahren durchaus geeignet ist, um einen Einblick in die Beanspruchungsverhältnisse bei den technischen Formgebungsverfahren zu gewinnen. Die Anwendung muß dabei auf ebene Verformungsprobleme beschränkt bleiben. Zu beachten bleibt weiterhin, daß die *Henck*yschen Sätze die Werkstoffverfestigung während der Verformung unberücksichtigt lassen.

5. Der Einfluß der Werkstoffverfestigung. Bei einem verfestigenden Werkstoff kann nicht mehr angenommen werden, daß die Schubspannung $\varkappa$ in den Gleitschichten der α- und β-Schar überall dieselbe Größe besitzt. Die Schubspannung ist vielmehr entsprechend dem an jeder Stelle des Gleitliniennetzes herrschenden Verformungs- und Verfestigungszustands längs der Gleitlinien veränderlich. Die Änderung des mittleren Drucks *p* ergibt sich alsdann auf Grund einer Gleichgewichtsbetrachtung zu

$$\Delta p_\alpha = -\int_0^{\Delta\beta} 2\,\varkappa\,d\beta - \int_0^{\Delta\beta} \frac{\partial\varkappa}{\partial\alpha}\,\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\beta}\,d\beta - \int_0^{\Delta\beta} k_f\,d\beta - \frac{1}{2}\int_0^{\Delta\beta} \frac{\partial k_f}{\partial\alpha}\,\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\beta}\,d\beta. \tag{15}$$

$$\Delta p_\beta = -\int_0^{\Delta\alpha} 2\,\varkappa\,d\alpha - \int_0^{\Delta\alpha} \frac{\partial\varkappa}{\partial\beta}\,\frac{\varrho_\beta}{\varrho_\alpha}\,d\alpha - \int_0^{\Delta\alpha} k_f\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{\Delta\alpha} \frac{\partial k_f}{\partial\beta}\,\frac{\varrho_\beta}{\varrho_\alpha}\,d\alpha. \tag{16}$$

Das erste Glied dieser Gleichung entspricht dem Produkt aus mittlerer Formänderungsfestigkeit und dem Winkel $\Delta\alpha$ bzw $\Delta\beta$, um welchen sich die Neigung der betrachteten Gleitlinien ändert. Im zweiten Glied tritt das Festigkeitsgefälle in der Querrichtung und die Krümmung ϱ_α und ϱ_β der α- bzw. β-Linien in Erscheinung. Bei konstantem $\varkappa$ bzw. k_f kommt das zweite Glied der Gleichungen in Fortfall und dieselben nehmen die einfache Form der Gleichung (1) und (2) an.

Beim Vorliegen einer Verfestigung verlaufen die Gleitschichten einer Schar nicht mehr unter einem gleichbleibenden Winkel $d\alpha$ bzw. $d\beta$ zueinandergeneigt, sondern dieser Winkel verändert sich entsprechend den Beziehungen

$$\Delta d\alpha = \frac{\Delta v}{4\varkappa\varrho_\alpha}\left(\varrho_\beta\frac{\partial\varkappa}{\partial u} - \varrho_\alpha\frac{\partial\varkappa}{\partial v}\right)d\alpha - \frac{\Delta v}{4k_f\varrho_\alpha}\left(\varrho_\beta\frac{\partial k_f}{\partial u} - \varrho_\alpha\frac{\partial k_f}{\partial v}\right)d\alpha, \tag{17}$$

$$\Delta d\beta = \frac{\Delta u}{4\varkappa\varrho_\beta}\left(\varrho_\alpha\frac{\partial\varkappa}{\partial v} - \varrho_\beta\frac{\partial\varkappa}{\partial u}\right)d\beta - \frac{\Delta u}{4k_f\varrho_\beta}\left(\varrho_\alpha\frac{\partial k_f}{\partial v} - \varrho_\beta\frac{\partial k_f}{\partial u}\right)d\beta. \tag{18}$$

Beim Fortschreiten längs einer Gleitlinie um Δu bzw. Δv vergrößert oder verkleinert sich der Winkel, den diese Linie mit den benachbarten Gleitlinien bildet, proportional zur Differenz der Produkte aus mittlerem Festigkeitsgefälle und Krümmungshalbmesser in den beiden Gleitrichtungen und umgekehrt proportional zum Produkt von mittlerer Formänderungsfestigkeit und Krümmungshalbmesser der betrachteten Gleitlinie.

Ist das Festigkeitsgefälle gleich Null, so wird der Klammerausdruck in den Gleichungen (17) und (18) ebenfalls gleich Null. Die Gleitlinien einer Schar verlaufen alsdann entsprechend dem zweiten *Henck*yschen Satz überall unter dem gleichen Winkel zueinander geneigt. Der Winkel zwischen den Gleitlinien bleibt auch dann unverändert, wenn in beiden Gleitrichtungen das gleiche Festigkeitsgefälle herrscht und die Gleitlinien in beiden Richtungen in gleicher Weise gekrümmt sind. Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn das Gleitschichtensystem aus logarithmischen Spiralen besteht, wie dies beim Tiefziehen und beim Rohrdruckzug der Fall ist. Wegen des rotationssymmetrischen Materialflusses ist in den genannten Fällen auch die Verfestigung in beiden Gleitrichtungen gleich groß, so daß der zweite *Henck*ysche Satz bei diesen Verformungsvorgängen

bei verfestigenden Werkstoffen seine Gültigkeit behält. Aber auch in den Fällen, in welchen die Krümmungshalbmesser der beiden Gleitlinienscharen voneinander abweichen, ist die Veränderung des Winkels zwischen den Gleitlinien bei normalem Verlauf der Verfestigung meist nur gering. Die ohne Berücksichtigung der Winkeländerung entworfenen Gleitliniensysteme ergeben daher auch bei verfestigenden Werkstoffen eine brauchbare Näherungslösung.

6. Zusammenfassung. Die *Henckyschen* Sätze und die von *L. Prandtl* abgeleiteten Regeln über den Verlauf der Gleitlinien bieten die Möglichkeit, bei ebenen Verformungsproblemen in einfacher Weise die Gleitliniennetze festzulegen, die mit den Gleichgewichtsbedingungen im bildsamen Zustand verträglich sind, und bei Kenntnis des Gleitliniennetzes die Spannungsverteilung im Verformungsgebiet zu bestimmen. Die für konstante Schubspannung entworfenen Gleitliniennetze behalten auch bei verfestigenden Werkstoffen Geltung, wenn die Gleitlinien in beiden Richtungen die gleiche Krümmung besitzen. In den übrigen Fällen können die so bestimmten Gleitliniensysteme als Näherungslösung dienen.

Das Untersuchungsverfahren wurde auf eine Reihe von technischen Stauch-, Zieh- und Preßvorgängen angewandt. Dabei wurde gezeigt, daß sich der *Prandtl*sche Ansatz über den Fließwiderstand beim Stauchen zwischen ebenen Platten bei verhindertem Gleiten auch auf den Fall übertragen läßt, daß die Schubspannung τ an den Preßflächen einen konstanten Wert μk_f besitzt. Beim Reckschmieden und Kaltwalzen sind beiderseits des Werkstücks an den Preßbahnen getrennte Gleitschichtensysteme wirksam, die sich beim Vordringen gegenseitig beeinflussen. Beim Walzen betätigen sich vornehmlich die von der Eintrittskante ausgehenden Gleitschichten, die sich mit fortschreitender Walzung über die ganze Länge des Walzgutes ausbreiten.

Beim Tiefziehen und beim Rohrdruckzug ergeben sich als Gleitlinien ein Netz von logarithmischen Spiralen. Das gleiche gilt für das verlustfreie Ziehen von Bändern. Bei Berücksichtigung der Ziehdüsenreibung verlaufen die Spiralen an der Düsenwand entsprechend stärker geneigt, wodurch sich eine vermehrte Krümmung der Gleitlinien und eine entsprechend vergrößerte Längsspannung bei gleichzeitigem Absinken der Druckquerspannung ergibt. Bei kleiner Düsenlänge bilden sich unter der Wirkung des Materialzusammenhangs Beanspruchungsverhältnisse aus, die denjenigen beim Recken mit schmalen Preßbahnen ähneln.

Beim Strangpressen und Lochen lassen sich die gegebenen Grenzbedingungen am besten durch Gleitschichtensysteme erfüllen, welche denjenigen beim Eindringen einer Schneide in einen Halbraum entsprechen, wobei das Verformungsgebiet sich jedoch um einen gewissen Betrag in den Ausgangsblock erstreckt. Beim Strangpressen verlaufen die Querspannungstrajektorien dabei nahezu halbkreisförmig um die Düsenöffnung, beim Lochen hingegen von der Stirnseite des Lochstempels beiderseits zur Düsenwand.

(Eingegangen am 23. Januar 1947.)

Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten.

Von **H. Görtler** in Freiburg i. Br.

1. Einleitende Bemerkungen. *K. Schröder* hat 1943 ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten entwickelt[1]. Durch diese Arbeit und ein Gespräch mit *L. Prandtl* angeregt, habe ich das im folgenden beschriebene, in der praktischen Durchführung einfache und besonders übersichtliche Berechnungsverfahren entworfen und erprobt, das im Gegensatz zum *Schröder*schen Verfahren die Grenzschichtgleichung direkt durch eine Differenzengleichung ersetzt. Es macht im übrigen von dem Vorteil der überspringenden Differenzen (siehe unten) wie schon in dem früher von mir entwickelten, in der Durchführung noch recht mühsamen Verfahren[2] Gebrauch. (Es ist dies ein Vorteil, der auch in dem von *K. Schröder* angegebenen Verfahren konsequent ausgenützt wird.) Während die von *Schröder* vorgenommene Transformation der Grenzschichtgleichung bei jedem Schritt des Rechenverfahrens Iterationen notwendig macht, kommt man bei dem folgenden Verfahren ohne Iterationen aus.

In einer späteren Untersuchung[3] benutzt *Schröder* sein Iterationsverfahren nur noch zur Berechnung der wandnächsten Grenzschichtteile, während er von einem gewissen Wandabstand an mit dem in meinem obengenannten Verfahren aus dem Jahre 1939 ebenfalls in diesem Bereich zur Fortsetzung benutzten Integralausdruck operiert. Der hauptsächliche Arbeitsaufwand meines damals angegebenen Verfahrens entstand gerade durch die sorgfältige, aber mühsame Ermittlung der wandnahen Grenzschichtteile. Die neue *Schröder*sche Kombination seines ersten Verfahrens von 1943 mit meinem Verfahren von 1939 erfordert daher im Vergleich zu jedem jener Verfahren für sich genommen einen geringeren Rechenaufwand.

2. Die Differentialgleichung der ebenen laminaren Grenzschichtströmung. Bezeichnen in üblicher Weise x die Bogenlänge der Profilkontur, y den senkrechten Wandabstand, u und v die Geschwindigkeitskomponenten in diesen Richtungen, t die Zeit, ϱ die konstante Dichte, ν die kinematische Zähigkeit und $p(x, t)$ den Druck längs der Körperkontur, so lautet die Grenzschichtdifferentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Unter Verwendung der charakteristischen Länge L und der charakteristischen Geschwindigkeit u_0 führen wir die Dimensionslosen

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x/L, \quad y^* = (u_0/\nu L)^{1/2} y, \quad t^* = u_0 t/L, \\ u^* &= u/u_0, \quad v^* = (L/\nu u_0)^{1/2} v, \quad p^* = p/\varrho u_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

ein. Auf diese Größen beziehen wir uns im weiteren ausschließlich, wir lassen daher die Sterne wieder weg und erhalten als dimensionslose Grenzschichtgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2.2}$$

Hinzu kommt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2.3}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} u = v &= 0 \quad \text{für } y = 0, \\ u &\to U \quad \text{für } y \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

[1] *K. Schröder*. Ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. Noch nicht veröffentlicht.

[2] *H. Görtler*. Z. angew. Math. Mech. 19 (1939). S. 129. Englische Übersetzung in J. Roy. aeronaut. Soc., London. 45 (1941), S. 35–50.

[3] *K. Schröder*. Berechnung der laminaren Grenzschicht an einem elliptischen Zylinder bei Zugrundelegung einer gemessenen Druckverteilung (1943). Noch nicht veröffentlicht.

wo die (mit u_0 dimensionslos gemachte) äußere Geschwindigkeit $U(x, t)$ mit $p(x, t)$ vermöge

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.5}$$

zusammenhängt.

3. Ersatz der Grenzschichtgleichung durch eine Differenzengleichung im stationären Fall. In der Halbebene $y \geqq 0$ der unabhängigen Veränderlichen x und y legen wir ein rechteckiges Punktgitter zugrunde (Abb. 1), bestehend aus den Punkten

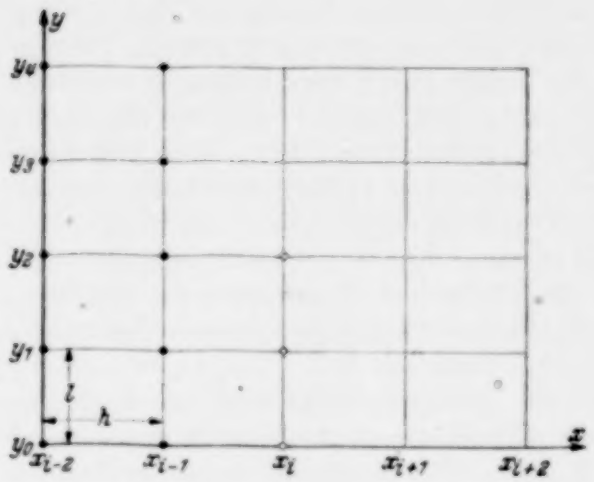


Abb. 1.

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_0 + i\,h \quad (i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \ldots), \\ y_k &= \quad k\,l \quad (k = 0,\ \ 1,\ \ 2 \ldots) \end{aligned}\right| \tag{3.1}$$

(h und l feste Zahlen). Den Wert irgendeiner Funktion von x und y an der Stelle x_i, y_k bezeichnen wir in üblicher Weise durch Anbringen der Indizes i, k, also etwa

$$u(x_i, y_k) = u(x_0 + i\,h, k\,l) = u_{i,k}\,. \tag{3.2}$$

Entgegen der üblichen Schreibweise definieren wir die „überspringenden Differenzen" erster Ordnung

$$\triangle_{i,k} = u_{i+1,k} - u_{i-1,k}\,, \tag{3.3}$$

$$\bigtriangledown_{i,k} = u_{i,k+1} - u_{i,k-1} \tag{3.4}$$

und ferner die überspringende Differenz zweiter Ordnung

$$\bigtriangledown^2_{i,k} = \bigtriangledown_{i,k+1} - \bigtriangledown_{i,k-1}\,. \tag{3.5}$$

Wir ersetzen die Differentialquotienten erster Ordnung in (2. 2) wie folgt durch „finite Ausdrücke zweiter Näherung":

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k} = \frac{1}{2h}\,\triangle_{i,k}\,, \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k} = \frac{1}{2l}\,\bigtriangledown_{i,k}\,. \tag{3.7}$$

Diese Näherungsformeln sind mit Fehlern der Ordnung $0(h^2)$ bzw. $0(l^2)$ gegen 1 behaftet (erstes Glied der differentiierten *Stirling*schen Interpolationsformel). Ferner setzen wir

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k} = \frac{1}{4l^2}\,\bigtriangledown^2_{i,k}\,. \tag{3.8}$$

Wir bilden damit $\partial^2 u/\partial y^2$ aus den nach (3.7) in guter Näherung berechneten Werten von $\partial u/\partial y$ in derselben Weise, wie wir $\partial u/\partial y$ aus u gebildet haben. Dies geschieht einmal, weil dieser Ausdruck (3.8) im Vergleich zum ersten Glied der zweimal differentiierten *Stirling*schen Interpolationsformel, nämlich der gewöhnlichen Differenz zweiter Ordnung, nach bereits erfolgter Berechnung von $\bigtriangledown_{i,k}$ einfacher zu ermitteln ist, zum anderen, weil diese Approximation weiter ausgreift — nämlich von y_{k-2} bis y_{k+2} — und daher, wie auch die Rechenerfahrung bestätigt, eher einen glatten Verlauf aufweist. Die Approximation (3.8) stellt nichts anderes dar als das erste Glied der zweimal differentiierten *Stirling*schen Formel für die Schrittweite $2l$, denn es ist $\bigtriangledown^2_{i,k} = u_{i,k+2} - 2u_{i,k} + u_{i,k-2}$. Demnach ist der Fehler wieder von der Ordnung $0(l^2)$ gegen 1.

Die Geschwindigkeitskomponente v ergibt sich nach (2.3) und (2.4) zu

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,.$$

Führt man die Integration nach der Trapezregel durch (Fehler wieder $0(l^2)$ gegen 1), so wird

$$v_{i,k} = -\frac{l}{2}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,\nu} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,\nu+1}\right],$$

also wegen (3.6)

$$v_{i,k} = -\frac{l}{2h}\sum_{\nu=1}^{k-1}\triangle_{i,\nu} - \frac{l}{4h}\,\triangle_{i,k}\,, \tag{3.9}$$

wenn man nach (2.4) und (3.6)

$$\triangle_{i,0} = 0 \tag{3.10}$$

berücksichtigt.

Setzt man (3.6), (3.7), (3.8) und (3.9) in die Grenzschichtgleichung (2.2) für stationäre Strömungen ($\partial u/\partial t = 0$) ein, so erhält man bei Auflösung nach der Unbekannten $\triangle_{i,k}$

$$\triangle_{i,k} = \frac{4h U_i U_i' + \frac{h}{l^2}\nabla^2_{i,k} + \nabla_{i,k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\triangle_{i,\nu}}{2\left(u_{i,k} - \frac{1}{4}\nabla_{i,k}\right)} . \tag{3.11}$$

Darin ist $U_i = U(x_i)$, $U_i' = \frac{dU}{dx}(x_i)$.

4. Das Rechenverfahren. Ist ein Geschwindigkeitsprofil an der Stelle $x = x_i$ durch die Zahlen $u_{i,k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) gegeben, so kann man unmittelbar alle Differenzen $\nabla_{i,k}$ und $\nabla^2_{i,k}$ nach (3.3) und (3.4) berechnen bis auf die Differenzen

$$\nabla_{i,0}, \quad \nabla^2_{i,0}, \quad \nabla^2_{i,1}.$$

Diese sind durch besondere Überlegungen wie folgt zu ermitteln. Nach der „ersten Grenzschichtbindung" (siehe die unter Fußnote 2 angeführte Arbeit) ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{dp}{dx} = -U U' . \tag{4.1}$$

also hat man nach (3.8)

$$\nabla^2_{i,0} = -4l^2 U_i U_i' \tag{4.2}$$

zu setzen. Ferner ist, wenn man auch noch die zweite Grenzschichtbindung

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0 \tag{4.3}$$

berücksichtigt, in nächster Wandnähe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -U U' + c(x)\, y^2 + d(x)\, y^3 \tag{4.4}$$

mit noch zu bestimmenden $c(x)$ und $d(x)$ eine brauchbare Approximation. Also kann man für wandnahe Profilpunkte setzen:

$$\nabla^2_{i,k} = 4l^2\left(-U_i U_i' + c_i y_k^2 + d_i y_k^3\right) . \tag{4.5}$$

Nimmt man an, daß diese Approximation für die ersten drei Teilpunkte y_1, y_2 und y_3 brauchbar ist, so besitzt man in (4.5) drei Gleichungen für die drei Unbekannten c_i, d_i und $\nabla^2_{i,1}$, da ja $\nabla^2_{i,2}$ und $\nabla^2_{i,3}$ bekannt sind. Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt für die uns interessierende Größe $\nabla^2_{i,1}$ die einfache Formel

$$\nabla^2_{i,1} = \frac{11}{18}\nabla^2_{i,0} + \frac{1}{2}\nabla^2_{i,2} - \frac{1}{9}\nabla^2_{i,3} . \tag{4.6}$$

Damit sind dann alle zweiten Differenzen an der Stelle $x = x_i$ bekannt. Die noch unbekannte erste Differenz $\nabla_{i,0}$ kann damit auch sofort rückwärts ermittelt werden. Übrigens braucht man $\nabla_{i,0}$ für das Fortsetzungsverfahren nicht, wohl aber für die Ermittlung der Wandschubspannung wegen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,0} = \frac{\nabla_{i,0}}{2l} .$$

Wir sind somit in der Lage, aus den gegebenen Profilpunkten $u_{i,k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) an der Stelle $x = x_i$ nacheinander für wachsende $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Werte von $\triangle_{i,k}$ nach der Differenzengleichung (3.11) zu berechnen. Kennt man also neben dem Profil $u_{i,k}$ auch noch das Profil $u_{i-1,k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) an der Stelle $x_{i-1} = x_i - h$, so ergibt

$$u_{i-1,k} + \triangle_{i,k} = u_{i+1,k} \tag{4.7}$$

das neue Profil stromabwärts an der Stelle $x_{i+1} = x_i + h$.

Ein Rechenschritt wird nach dem in Abb. 2 wiedergegebenen Schema durchgeführt. Zur Erläuterung sei noch das Folgende gesagt. Die beiden ersten Spalten enthalten lediglich die Daten der beiden für den Schritt von x_i zu x_{i+1} benötigten Profile. Die ersten fünf Spalten des stark eingerahmten Schemas der eigentlichen Rechnung können spaltenweise berechnet werden: nur die Zahlen $\nabla^2_{i,0}$ und $\nabla^2_{i,1}$ sind besonders zu berechnen, wozu in dem Bilde die Ziffern der benötigten Gleichungen (4.2) und (4.6) angegeben sind. Die beiden letzten Spalten müssen dann zeilenweise berechnet werden, wobei das zuletzt berechnete $\triangle_{i,k}$ jeweils nur zu der in dieser Zeile stehenden Summe $\sum_{\nu=1}^{k-1} \triangle_{i,\nu}$ zu addieren ist, um das Glied (3) für die nächste Zeile zu erhalten. Addiert man $\triangle_{i,k}$ zu $u_{i-1,k}$, so erhält man die in das nächste Rechenblatt einzutragenden Werte $u_{i+1,k}$ ($k=0,1,2,\ldots$) des Profils in $x=x_{i+1}$. (Es sei noch bemerkt, daß die erste Zeile ($y_k=0$) von Abb. 2 weggelassen werden kann, da sie für die Rechnung nicht benötigt wird. Wir haben sie trotzdem aufgenommen, weil man für die Ermittlung der Wandschubspannung die Größe $\nabla_{i,0}$ benötigt und diese Zahl in das zugehörige Feld wird eintragen wollen. Die übrigen Zahlen dieser ersten Zeile sind daher, insofern sie nicht von vorneherein als gleich Null bekannt sind, im Beispiel der Zahlentafel 1 durch Striche ersetzt.) Für den Aufbau des Rechenblatts insgesamt sind die Formeln (3.3), (3.4), (3.5), (3.10), (3.11), (4.2), (4.6) und (4.7) maßgebend, welche alle benötigten Definitionen und Relationen enthalten.

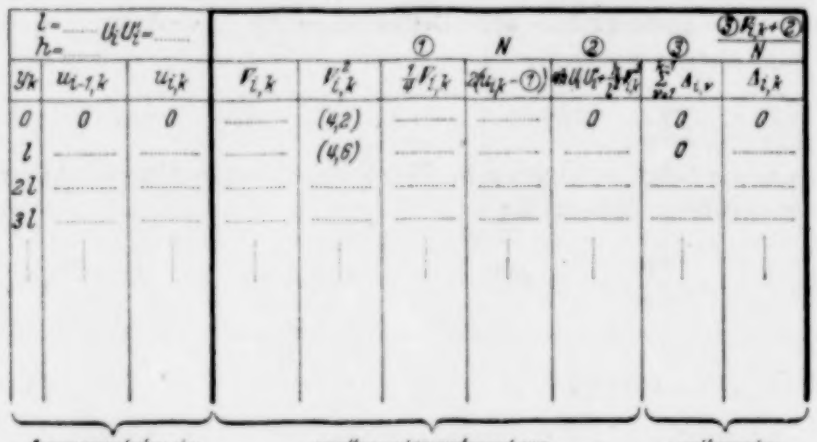


Abb. 2.

Die zur Ingangsetzung der Rechnung für den ersten Schritt erforderlichen beiden Ausgangsprofile verschafft man sich im Falle einer Anströmung mit vorderem Staupunkt mit Hilfe der bekannten *Blasius*schen Reihenentwicklung nach der Wandbogenlänge[1] unter Verwendung der Zahlentafeln von *L. Howarth* und *N. Frößling*[2], wobei man diese Lösung so weit in x-Richtung vom vorderen Staupunkt aus verwenden kann, wie die nach drei Gliedern abgebrochene Reihe die Lösung noch gut darstellt. Handelt es sich um die Anströmung einer Spitze, so nehme man entsprechend die von *Howarth*[3] angegebene Lösung für $U=u_0+u_1x$ so weit, wie man die wirkliche äußere Geschwindigkeit durch diesen linearen Ausdruck approximieren kann und zugleich die Konvergenzgüte der *Howarth*schen Reihenentwicklung nach x die Verwendung der nach sechs Gliedern abgebrochenen Reihe gestattet.

In Zahlentafel 1 ist die numerische Durchführung eines Schrittes ausführlich dargestellt (9. Schritt des unten in Abschnitt **5** besprochenen 2. Beispiels). Zu dieser reinen Rechenarbeit kommt die graphische Auftragung hinzu, die man ohnehin stets vornehmen wird, und die zur Kontrolle der Rechnung dient. Wenn die berechneten Profilpunkte eine geringe Streuung aufweisen sollten, empfiehlt es sich, eine graphische Glättung des jeweiligen Profils $u(x_i,y)$ vorzunehmen, bevor man zur Berechnung des nächsten Schrittes übergeht. Neben der Profilauftragung wird man nach Zurücklegung mehrerer Schritte auch die Kurven $u(x,y_k)$ bei konstantem Wandabstand y_k auftragen (siehe als Beispiel etwa Abb. 4), um auch hier gegebenenfalls graphisch zu glätten.

---

[1] *H. Blasius*, Z. Math. u. Physik 56 (1908), S. 1, insbesondere S. 15 ff.

[2] *L. Howarth*, Steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. ARC Reports and Memoranda No. 1632, London 1935; *N. Frößling*, Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. Lunds Univ. Årsskr. N. F. Avd. 2, Bd. 36, Nr. 4 (1940), 32 S. Inzwischen ist eine weitgehende Fortführung dieser Vertafelung für Beiwertfunktionen höherer Ordnung geleistet worden von *A. Ulrich*, Die laminare Reibungsschicht am Kreiszylinder (1943). Noch nicht veröffentlicht.

[3] *L. Howarth*, Proc. Roy. Soc. London A, 164 (1938), S. 547.

Zahlentafel 1. *Beispiel der numerischen Durchführung eines Rechenschritts.*

$h = 0{,}005$ $\quad U_8\,U_8' = -0{,}9100$

$l = 0\,1789$

			①	②	③	③ $\nabla_{8,k}$ + ②		
$x =$	0,085	0,090		N		N	$x = 0{,}095$	
$yk/2\sqrt{0{,}05}$	$u_{7,k}$	$u_{8,k}$	$\frac{1}{4}\nabla_{8,k}$	$2(u_{8,k} - (1))$	$-0{,}01820$ $+0{,}15625\,\nabla^2_{8,k}$	$\sum_{\nu=1}^{k-1} \Delta_{8,\nu}$	$\Delta_{8,k}$	$U_{8,k}$
0	0	0	—	—	0	0	0	0
0,4	0,0942	0,0850	0,0515	0,0670	−0,00139	0	−0,0207	0,0735
0,8	0,2243	0,2061	0,0645	0,2832	−0,00606	−0,0207	−0,0403	0,1840
1,2	0,3707	0,3430	0,0710	0,5440	−0,01476	−0,0610	−0,0590	0,3117
1,6	0,5231	0,4899	0,0700	0,8398	−0,02472	−0,1200	−0,0694	0,4537
2,0	0,6566	0,6230	0,0605	1,1250	−0,03261	−0,1894	−0,0697	0,5869
2,4	0,7630	0,7320	0,0470	1,3700	−0,03600	−0,2591	−0,0618	0,7012
2,8	0,8335	0,8108	0,0320	1,5576	−0,03584	−0,3209	−0,0494	0,7841
3,2	0,8753	0,8602	0,0187	1,6830	−0,03211	−0,3703	−0,0356	0,8397
3,6	0,8971	0,8857	0,0098	1,7518	−0,02678	−0,4059	−0,0244	0,8727
4,0	0,9075	0,8994	0,0050	1,7888	−0,02292	−0,4303	−0,0176	0,8899
4,4	0,9122	0,9057	0,0022	1,8070	−0,02072	−0,4479	−0,0137	0,8985
4,8	0,9140	0,9084	0,0010	1,8148	−0,01939	−0,4616	−0,0117	0,9023
5,2	0,9147	0,9096	0,0004	1,8184	−0,01875	−0,4733	−0,0107	0,9040
5,6	0,9150	0,9098	0,0001	1,8194	−0,01839	−0,4840	−0,0102	0,9048
6,0	0,9150	0,9100	0,0000	1,8200	−0,01826	−0,4942	−0,0101	0,9049

$\nabla_{8,k}$	$\nabla^2_{8,k}$
0,1504	+0,1165
0,2061	+0,1076
0,2580	+0,0777
0,2838	+0,0220
0,2800	−0,0417
0,2421	−0,0922
0,1878	−0,1139
0,1282	−0,1129
0,0749	−0,0890
0,0392	−0,0549
0,0200	−0,0302
0,0090	−0,0161
0,0039	−0,0076
0,0014	−0,0035
0,0004	−0,0012
0,0002	−0,0004

Es möge hier noch auf eine bekannte Erscheinung hingewiesen werden, die allgemein bei Verwendung überspringender Differenzen zur Fortsetzung einer Lösung auftreten kann. Da nach (4.7) $u_{i,k+1}$ unter Überspringen von $u_{i,k}$ an $u_{i,k-1}$ angeschlossen wird und nur mittelbar über die Differentialgleichung mit $u_{i,k}$ verknüpft ist, kann es vorkommen, daß der Verlauf der Kurven $u(x, y_k)$ sich in zwei benachbarte Kurvenzüge aufspaltet[1] (Abb. 3), wobei sich diese Aufrauhung im Verlaufe einer größeren Zahl von Schritten verstärken kann. Die Ursache für eine solche

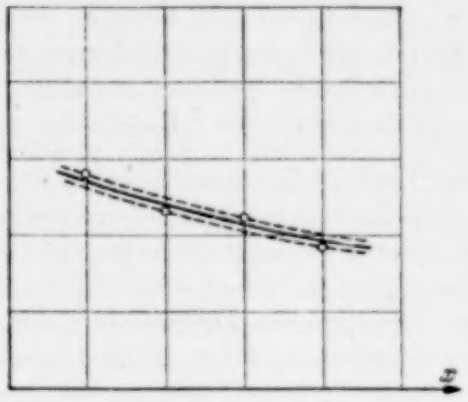


Abb. 3.

Aufrauhung kann entweder in nicht genügend genauen Werten der beiden Ausgangsprofile gefunden werden oder auf zu große Schrittweiten h bzw. l zurückzuführen sein.

Die Maschenweite l wird man normalerweise im Verlaufe einer ganzen Grenzschichtrechnung unverändert lassen können. Soll der Fehler der Rechnung für $u_{i,k}$ unter 1 % bezogen auf U_i bleiben, so wird man mindestens etwa 10, im allgemeinen durchschnittlich 15 Profilpunkte y_k der Rechnung zugrunde legen. Mit Anwachsen der Grenzschichtdicke in Fortsetzungsrichtung sind zu den gewählten Ausgangsprofilpunkten lediglich entsprechend viele weitere Profilpunkte y_k nach außen hin anzubauen, um den Anschluß an den asymptotischen Wert U_i mit der aufgewandten Genauigkeit zu erzielen. Dagegen wird man die Schrittgröße h in Fortsetzungsrichtung gelegentlich ändern müssen, um diese zur Aufrechterhaltung

[1] Das Auftreten dieser Aufrauhung bei der Fortsetzung der Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und ihre numerische Glättung behandeln *L. Collatz* und *R. Zurmühl*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 42, insbesondere S. 46.

der gestellten Genauigkeitsforderung dem Grad der Veränderung des Grenzschichtverlaufs mit x anzupassen. Ist man bis zur Stelle x_i mit Schritten der Größe h angelangt, und will man nun den oder die nächsten Schritte mit der Schrittweite h_1 durchführen, so benötigt man neben dem numerisch vorliegenden Profil $u(x_i, y)$ das Profil $u(x_i - h_1, y)$. Dieses verschafft man sich bequem durch sorgfältige graphische Interpolation aus den für $x \leqq x_i$ ohnehin schon aufgetragenen Kurven $u(x, y_k)$. (Hat man einen Schritt mit zu großem h durchgeführt, und sieht man nachträglich ein, daß ein kleinerer Schritt notwendig wird, so war die erste Rechnung natürlich nicht vergebens, denn an Stelle des berechneten $\triangle_{i,k}$ hat man für den nun kleineren Schritt h_1 nur $\triangle_{i,k} h_1/h$ als neues $\triangle_{i,k}$ zu verwenden.) Man wird natürlich bestrebt sein, die Schrittgröße h möglichst über weite Strecken unverändert zu halten. Man wird dies auch auf die Gefahr hin tun, daß man im Rahmen der gestellten Genauigkeitsansprüche vielleicht ein zu kleines h wählt und damit einen Schritt mehr als unbedingt notwendig machen muß. Der Rechenaufwand pro Schritt ist ja nicht mehr erheblich.

Man kann die hier eingeschalteten graphischen Hilfsmittel natürlich bei entsprechend größerem Zeitaufwand durch sorgfältigere numerische Verfahren ersetzen. Bei der Forderung, daß der Fehler in $u_{i,k}$ unter 1 % bezogen auf U_i liegen soll, was als normaler Genauigkeitsanspruch anzusehen ist, sind die geschilderten graphischen Hilfsmittel ausreichend und mit dem geringsten Arbeitsaufwand verbunden, da man, wie bereits bemerkt, ohnehin die graphischen Auftragungen stets zur Kontrolle der Rechnung heranziehen wird.

Der Fehler, den man bei Ersatz der Ableitungen durch überspringende Differenzen macht, kann in bekannter Weise leicht abgeschätzt werden. Neben diesem Fehler ist für die Festlegung der Schrittweite natürlich jeweils auf die Genauigkeit zu achten, mit der durch (3.11) der Wert von $\triangle_{i,k}$ geliefert wird. Dieser Gesichtspunkt kann unter Umständen entscheidend werden, etwa wenn irgendwo Differenzen annähernd gleicher Zahlen zu bilden sind und diese im Ergebnis stark ins Gewicht fallen. Eine genauere Fehlerabschätzung bleibt noch zu erbringen.

Über den Zeitaufwand für die Durchführung eines Schrittes, d. h. für die Ausführung der Rechnung und der graphischen Auftragungen, können folgende Angaben gemacht werden: Bei Wahl von zehn Profilpunkten $y_k (k = 1, 2, \ldots, 10)$ benötigt ein eingeübter Rechner etwa ¾ Stunden bei der schon ungewöhnlich hohen Zahl von zwanzig Profilpunkten entsprechend etwa 1½ Stunden.

5. Praktische Erprobung des Verfahrens. 1. Beispiel: Grenzschicht an der längs angeströmten Platte. Der sehr sorgfältig berechnete Verlauf der Grenzschichtströmung an einer längs angeströmten Platte nach der von *H. Blasius*[1] angegebenen exakten Lösung bietet eine gute Möglichkeit, das Differenzenverfahren zu erproben. Wir legen dabei die von *L. Howarth*[2] berechnete Zahlentafel zugrunde und sehen diese Lösung von der Plattenvorderkante $x = 0$ an bis zu einer beliebigen Stelle $x = x_0$ als zu Recht bestehend an, um sie nunmehr nach dem Differenzenverfahren des Abschnitts 4 für $x > x_0$ fortzusetzen.

Als Bezugsgrößen für die nach (2.1) eingeführten Dimensionslosen wählen wir

$$L = x_0, \quad u_0 = U_\infty, \tag{5.1}$$

wo U_∞ die konstante Geschwindigkeit der äußeren Potentialströmung ist. Wegen $L = x_0$ setzt unsere Rechnung im (dimensionslos gemachten) Abstand $x = 1$ von der Plattenvorderkante ein. Als Schrittgröße wählen wir $h = 0{,}2$ und führen fünf Schritte (bis $x = 2$ also) durch. Ferner wählen wir $l = 0{,}6$. Das neben $u(1, y)$ benötigte zweite Ausgangsprofil $u(0{,}8, y)$ wird durch numerische Interpolation aus der *Howarth*schen Tabelle für die Wandabstände $y_k = k\,l\,(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ermittelt. Bekanntlich ist

$$u = f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = y/2\sqrt{x} \tag{5.2}$$

eine reine Funktion von η[3]. Die Ausgangsprofile sind in Zahlentafel 2 wiedergegeben.

---

[1] *H. Blasius*, a. a. O., s. Fußnote 1, S. 176.

[2] *L. Howarth*, a. a. O., s. Fußnote 3, S. 176.

[3] In der *Howarth*schen Arbeit mit $\frac{1}{2} f_0'(\eta)$ bezeichnet.

Zahlentafel 2.

Ausgangsprofile für die Berechnung der Plattengrenzschicht.

$x_i =$	0,8	1,0
y_k	$u_{-1,k}$	$u_{0,k}$
0	0	0
0,6	0,2223	0,1989
1,2	0,4382	0,3938
1,8	0,6331	0,5748
2,4	0,7893	0,7290
3,0	0,8964	0,8460
3,6	0,9571	0,9233
4,2	0,9853	0,9670
4,8	0,9959	0,9878
5,4	0,9996	0,9962
6,0	0,9998	0,9990
6,6	1,0000	0,9998
7,2	1,0000	1,0000

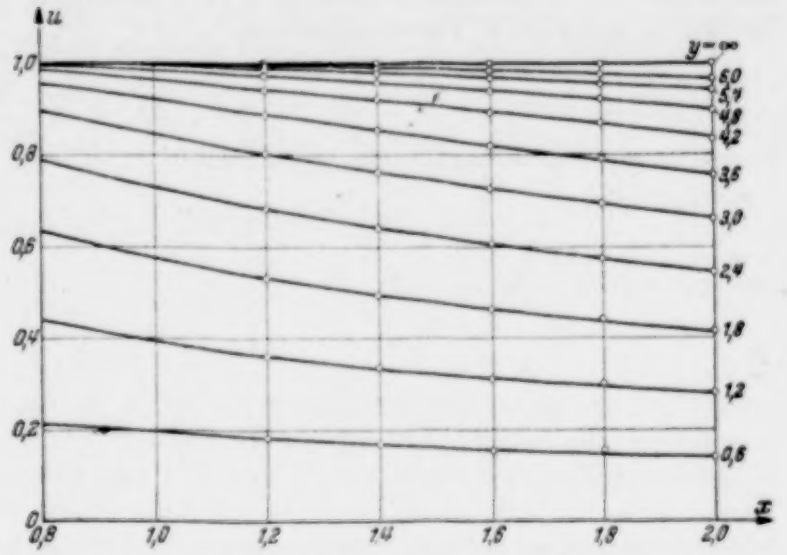


Abb. 4. Plattengrenzschicht: Graphische Glättung in der Auftragung $u(x, y_k)$ über x.

Das Ergebnis ist in Abb. 4 dargestellt. Die leicht streuenden Punkte $u_{i,k}$ sind das direkte Ergebnis der Rechnung. Erst nach Zurücklegung der fünf Schritte von $x=1$ bis $x=2$ wurde in diesem Bilde eine graphische Glättung vorgenommen, dessen Resultat die in diesem Bild ausgezogenen Kurven $u(x, y_k)$ wiedergeben. Die maximale Abweichung dieses Resultats von den exakten Werten (5.2) (bezogen auf den Betrag 1 der äußeren Geschwindigkeit) beträgt $3\,^0/_{00}$, im allgemeinen ist die Abweichung wesentlich geringer. Dementsprechend weichen die ermittelten und in Abb. 5 wiedergegebenen Geschwindigkeitsprofile von den exakten Werten so wenig ab, daß der Unterschied in dieser Auftragung nicht mehr deutlich zur Darstellung gebracht werden kann.

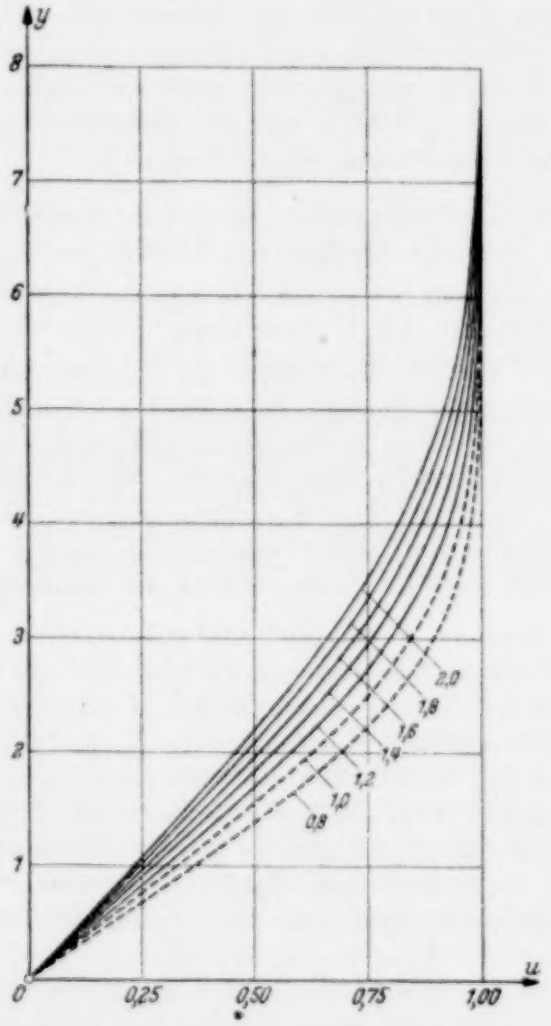


Abb. 5. Plattengrenzschicht: Ausgangsprofile (gestrichelt) und fünf berechnete Profile (ausgezogen).

Zur Rechnung ist noch zu bemerken: Wegen $U_\infty = \text{konst.}$ ist $\nabla^2_{i,0} = 0$. Da ferner die Grenzschichtbindungen[1] formal wegen $U_\infty = \text{konst.}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c(x)\, y^2 + 0\, y^3 + 0\, y^4 + d(x)\, y^5 + \dots$$

ergeben, kann in diesem Sonderfall für die Berechnung von $\nabla^2_{i,1}$ auch die gegenüber (4.6) einfachere Näherungsformel

$$\nabla^2_{i,1} = \frac{1}{4} \nabla^2_{i,2}$$

benutzt werden, die sich ergibt, wenn man die Approximation $\partial^2 u/\partial y^2 = c(x)\, y^2$ als bis $y = y_2 (= 1{,}2)$ genügend genau gültig ansieht.

2. Beispiel: Grenzschicht bei linearem Geschwindigkeitsabfall. Für die Grenzschichtströmung längs einer Platte, welcher von außen her ein linear von dem Abstand x von der Plattenvorderkante abhängendes Druckgefälle aufgeprägt wird, hat *L. Howarth*[2] die exakte Lösung in Form einer unendlichen Reihe angegeben. Ist

$$U = b_0 - b_1 x \qquad (5.3)$$

[1] Siehe hierzu etwa die in Fußnote 2, S. 173 angegebene Arbeit.

[2] *L. Howarth*, a. a. O., s. Fußnote 3, S. 176.

die äußere Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung, und wählt man als Bezugsgrößen für die in (2.1) eingeführten Dimensionslosen

$$L = \frac{b_0}{b_1}, \quad u_0 = b_0, \tag{5.4}$$

so ist in unserer dimensionslosen Schreibweise $U = 1 - x$, ferner nach *Howarth*

$$u = \frac{1}{2}\left[f_0'(\eta) - 8xf_1'(\eta) + (8x)^2 f_2'(\eta) - (8x)^3 f_3'(\eta) + \ldots\right], \tag{5.5}$$

wo hier wieder wie in (5.2)

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

ist. (Das erste Glied der Reihe stellt natürlich als Lösung für $b_1 = 0$ die im ersten Beispiel oben angeführte *Blasius*sche Lösung dar.) *Howarth* hat die Koeffizienten $f_\nu'(\eta)$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 6$ in Zahlentafeln (zusammen mit f_ν und f_ν'') angegeben, darüber hinaus ferner die Zahlenwerte von $f_7'''(0)$ und $f_8'''(0)$. Die Konvergenzgüte der Reihe erlaubte jedoch nicht, mit diesen Gliedern über die Ablösungsstelle mehr auszusagen, als daß sie zwischen $x = 0{,}119$ und $0{,}129$ liege. *Howarth* hat daher für $x > 0{,}0875$ eine (mit dem *Pohlhausen*-Verfahren verwandte) approximative Methode angewandt, mittels derer die Ablösungsstelle zu $x = 0{,}120$ ermittelt werden konnte. Nach dem ursprünglichen *Pohlhausen*-Verfahren erhält man Ablösung erst bei[1] $x = 0{,}156$ (!), während andererseits *Kármán* und *Millikan*[2] nach dem von ihnen angegebenen Näherungsverfahren Ablösung bei $x = 0{,}102$ fanden.

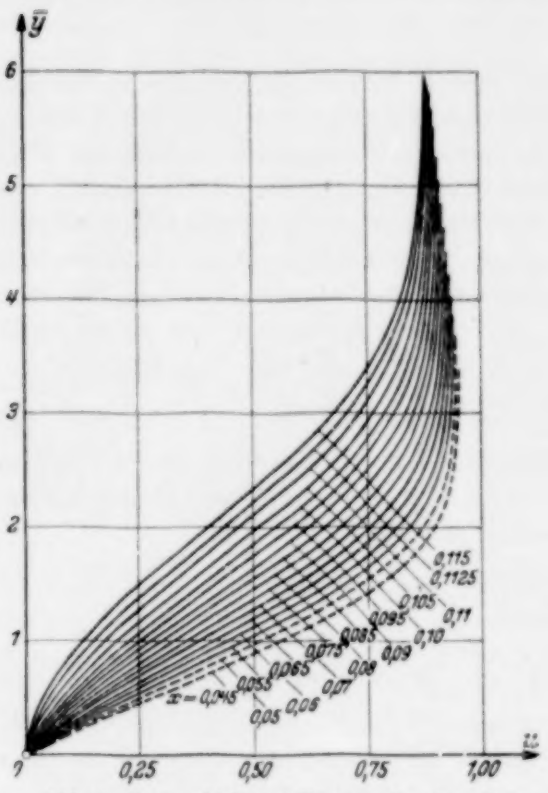


Abb. 6. Grenzschicht bei linearem Druckanstieg: Ausgangsprofile (gestrichelt) und berechnete Profile (ausgezogen). Es ist $\bar{y} = y/2\sqrt{0{,}05}$.

Wir haben nunmehr mit dem Differenzenverfahren folgende Rechnung angestellt. Für $x \leqq 0{,}05$ wurde die *Howarth*sche Reihe als Lösung übernommen. Für $0{,}05 \leqq x \leqq 0{,}0875$ ließ sich das Differenzenverfahren an den von *Howarth* angegebenen exakten Profilen kontrollieren, für $x > 0{,}0875$ mit der *Howarth*schen approximativen Fortsetzung vergleichen.

Wir wählten die Profilpunkte y_k, um die *Howarth*schen Tabellen an der Ausgangsstelle $x = 0{,}05$ bequem verwenden zu können, so, daß $\eta|_{x=0{,}05} = y/2\sqrt{0{,}05}$ die Werte 0, 0.4, 0,8, 1.2, ... annahm. Es ist also $l = 0{,}4 \cdot 2 \cdot \sqrt{0{,}05} = 0{,}1789$. Es wurden 12 Schritte mit der unveränderten Schrittlänge $h = 0{,}005$ bis $x = 0{,}110$ durchgeführt — bei einer Genauigkeitsforderung von 1 % für $u_{i,k}$ bezogen auf U_i, hätte man die Schritte teilweise größer wählen können —, daraufhin zwei Schritte mit $h = 0{,}0025$ bis $x = 0{,}115$. Die Ausgangsprofile $u(0{,}045, y)$ und $u(0{,}050, y)$ sind in Zahlentafel 3 angegeben. Die bereits früher wiedergegebene Zahlentafel 1 ist den numerischen Rechnungen zu diesem Beispiel entnommen.

Abb. 6 gibt die Gesamtheit der berechneten Geschwindigkeitsprofile $u(x_i, y)$ wieder, Abb. 7 die Kurven $u(x, y_k)$. In Ergänzung für das Intervall $0 \leqq x \leqq 0{,}05$ und zum Vergleich für $x > 0{,}05$ ist in Abb. 7 gestrichelt der Kurvenverlauf nach den *Howarth*schen Rechnungen dargestellt. Noch bis $x = 0{,}110$ bleiben die Abweichungen gegenüber unserer Rechnung unter 0,8 %. Erst in nächster Nähe der Ablösung überschreiten sie 1 % und erreichen bis $x = 0{,}115$ maximal 1,5 % (immer bezogen auf das zugehörige U_i). Abb. 8 gibt den Vergleich einiger von uns berechneten Profile mit den Ergebnissen von *Howarth* und mit den von uns nach dem *Pohlhausen*-Verfahren ermittelten Profilen wieder. Man erkennt, daß das *Pohlhausen*-Verfahren stark abweichende

[1] Dies stimmt mit der von *Kármán* und *C. B. Millikan*, a. a. O. (s. folgende Fußnote 2) gemachten Angabe überein.

[2] *Th. v. Kármán* und *C. B. Millikan*, On the theory of laminar boundary layers involving separation. NACA-Report Nr. 504 (1934).

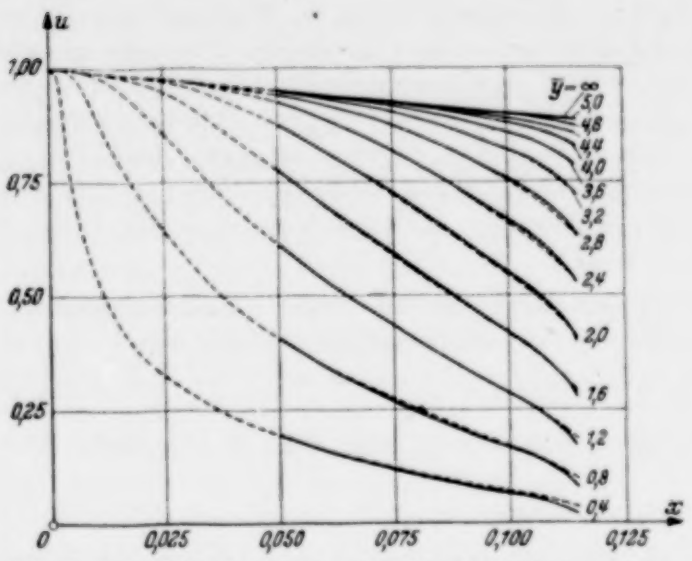


Abb. 7. Grenzschicht bei linearem Druckanstieg: Kurven $u(x, y)$ nach *Howarth* (gestrichelt) und nach unserer Rechnung (ausgezogen). Es ist $\bar{y} = y/2\sqrt{0{,}05}$.

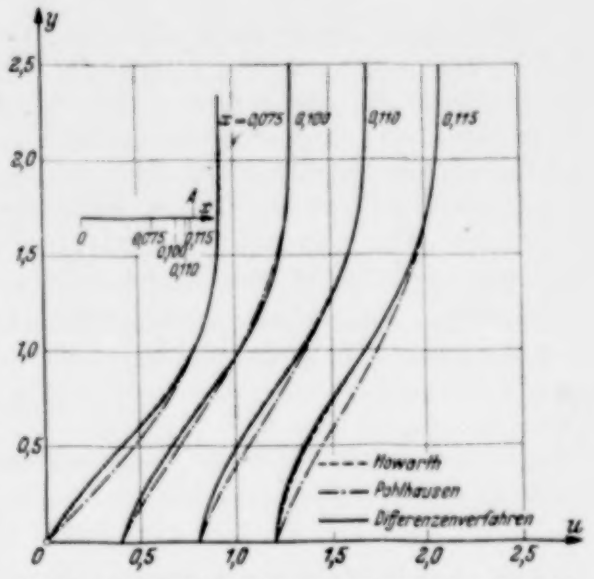


Abb. 8. Grenzschicht bei linearem Druckanstieg: Vergleich einiger Profile nach verschiedenen Rechenverfahren.

Geschwindigkeitsverteilungen liefert. Dagegen werden die Abweichungen vom Ergebnis der *Howarth*schen approximativen Rechnung überhaupt erst unmittelbar vor der Ablösung deutlich sichtbar.

Zahlentafel 3.

Ausgangsprofile für das 2. Beispiel.

$x =$	0,045	0,050
$\frac{y_k}{2\sqrt{0{,}05}}$	$u_{-1,k}$	$u_{0,k}$
0	0	0
0,4	0,2145	0,1951
0,8	0,4440	0,4088
1,2	0,6552	0,6129
1,6	0,8130	0,7747
2,0	0,9027	0,8766
2,4	0,9406	0,9259
2,8	0,9520	0,9439
3,2	0,9545	0,9488
3,6	0,9550	0,9498
4,0	0,9550	0,9500

Der aus den berechneten Werten von $\nabla_{i,0}$ ermittelte Verlauf von $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ wurde zur Bestimmung der Ablösungsstelle aufgetragen (Abb. 9) und ergab extrapolatorisch Ablösung in $x = 0{,}1185$ in guter Übereinstimmung mit dem *Howarth*schen Resultat $x = 0{,}120$. Dagegen sind der nach *Pohlhausen* ermittelte Wert $x = 0{,}156$ und der von *Kármán* und *Millikan* angegebene Wert $x = 0{,}102$ erheblich falsch.

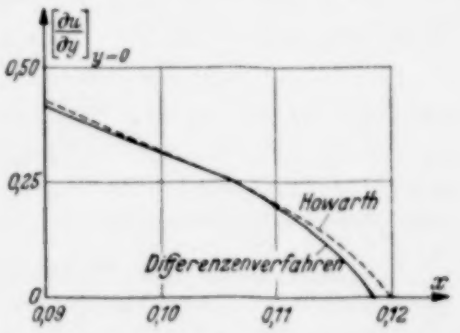


Abb. 9. Grenzschicht bei linearem Druckanstieg: Ermittlung der Ablösungsstelle.

Diese Rechnungen zeigten zugleich die Grenzen unseres Verfahrens: Durch den Ablösungspunkt hindurch kann man die Grenzschichtberechnung nur unter einem Genauigkeitsverlust fortsetzen, in allernächster Nähe der Ablösungsstelle ergeben sich nämlich Zähler und Nenner unseres Fortsetzungsausdrucks (3.11) in Wandnähe je als Differenzen ähnlicher Zahlen. Dieselbe in der Gestalt der Differentialgleichung (2.2) begründete Schwierigkeit ergab sich übrigens auch bei unserem Fortsetzungsverfahren aus dem Jahre 1939. Nun liegt jedoch im allgemeinen kein Interesse vor, die Rechnungen durch die Ablösungsstelle hindurch fortzusetzen, da bei normalen und erst recht bei stärkeren Ablösungen schon an der Ablösungsstelle selbst die Grenzschichtvernachlässigungen nicht mehr zu Recht bestehen.

3. Beispiel: Grenzschicht am Kreiszylinder. Es wird die von K. *Hiemenz*[1] gemessene Druckverteilung zugrunde gelegt. In den *Hiemenz*schen Versuchen besaß der benutzte gerade Kreiszylinder den Durchmesser $2r=9{,}75$ cm. Er war in eine Wasserströmung ($\nu=0{,}01$) mit der ungestörten Anströmgeschwindigkeit $U_\infty=19.2$ cm/s eingetaucht ($\mathrm{Re}=U_\infty r/\nu=9360$). Bekanntlich lieferte die abgebrochene *Blasius*sche Reihenentwicklung für die Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht in diesem Falle die Ablösungsstelle in guter Übereinstimmung mit den Messungen. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht wird jedoch schon vor der Ablösung nicht mehr annähernd richtig wiedergegeben.

Zur Verwendung der *Blasius*schen Lösung approximierte *Hiemenz* die Geschwindigkeitsverteilung am Rande der Grenzschicht auf Grund seiner Druckmessungen durch das Polynom

$$U=x-0{,}006289\,x^3-0{,}00004615\,x^5, \tag{5.6}$$

wenn hier und im folgenden als Bezugsgeschwindigkeit und Bezugslänge für die Dimensionslosmachung nach (2.1) speziell

$$u_0=7{,}151\ \mathrm{cm/sec}\quad L=1\ \mathrm{cm} \tag{5.7}$$

gewählt werden (dies zur bequemen Anwendung der *Blasius*schen Lösung). Der Vergleich dieser Approximation mit den Messungen ist in Abb. 10 wiedergegeben. Die Approximation von U ist im Bereich $0\leqq x\leqq 7$ brauchbar, die höheren Ableitungen von U werden jedoch bereits früher schlecht wiedergegeben.

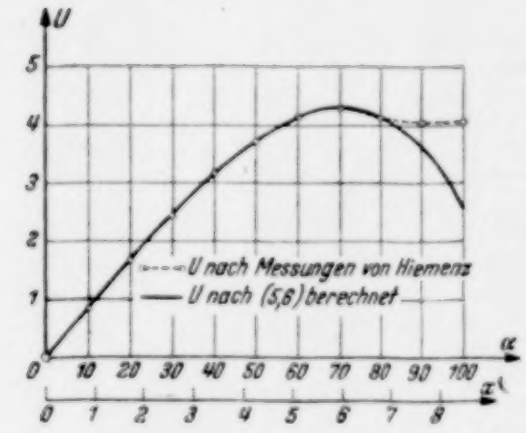


Abb. 10. Grenzschicht am *Hiemenz*schen Kreiszylinder: Äußere Geschwindigkeitsverteilung.

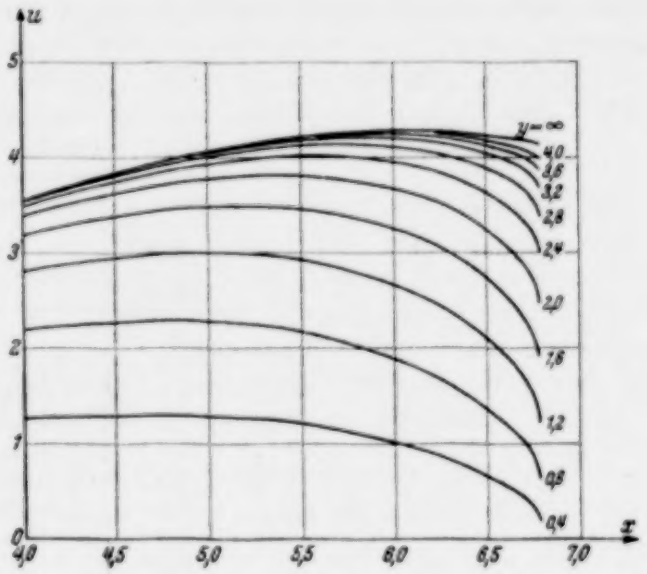


Abb. 11. Grenzschicht am *Hiemenz*schen Kreiszylinder: Berechnete Kurven $u\,(x, y_k)$.

Es bezeichne α den Zentriwinkel, gemessen vom vorderen Staupunkt aus: $\alpha=360\,x/9{,}75\,\pi=11{,}75\,x$. Da Ablösung von *Hiemenz* zwischen $\alpha=80°$ und $\alpha=82°$ beobachtet wurde, d. h. zwischen $x=6{,}81$ und $x=6{,}98$, wird die Approximation (5.6) zur Berechnung des für das Differenzenverfahren benötigten Ausdrucks UU' bis zur Ablösungsstelle ausreichen, falls auch die Rechnung Ablösung vor $x\approx 7$ ergibt (siehe hierzu auch unten).

Der mittels der *Blasius*schen (nach den bisher bekannten drei Gliedern abgebrochenen) Reihe sich ergebende Verlauf der Grenzschicht kann, wie ich schon früher feststellte, für $x\leqq 4{,}5$ ($\alpha\leqq 52{,}9°$) als in guter Näherung gültig angesehen werden[2]. Mit $l=0{,}4$ und für die zunächst gewählte Schrittgröße $h=0{,}25$ wurden daher die Profile $u(4{,}25, y)$ und $u(4{,}5, y)$ als Ausgangsverteilungen zugrunde gelegt. Sie sind in Zahlentafel 4 numerisch angegeben.

Es wurden zunächst 8 Schritte mit $h=0{,}25$ bis $x=6{,}5$ durchgeführt, dann zwei Schritte mit $h=0{,}1$ bis $x=6{,}7$ und daraufhin je ein Schritt mit $h=0{,}05$ und $0{,}025$ bis $x=6{,}775$. Abb. 11 zeigt

[1] *K. Hiemenz*, Dinglers polytechn. J. 326 (1911), S. 321.

[2] *H. Görtler*, a. a. O., s. Fußnote 2, S. 173. Bis $x=4{,}5$ ist, wie dort gezeigt wurde, die erste und wesentlichste Grenzschichtbindung noch gut erfüllt, um von hier an in rasch zunehmendem Maße verletzt zu werden. Inzwischen sind weitere Glieder der *Blasius*schen Reihe von *A. Ulrich* berechnet worden. (Siehe auch Fußnote 2, Seite 176.) Ich habe festgestellt, daß man mit diesen die Grenzschicht bis $x\approx 6$ ($\approx$ Ort des Druckminimums) mit der hier geforderten Genauigkeit berechnen kann.

den so ermittelten Verlauf der Kurven $u(x,y_k)$. In Abb. 12 ist der errechnete Verlauf von $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ über x aufgetragen und mit dem Ergebnis meiner früheren Rechnung[1] sowie mit dem Verlauf nach der *Blasius*schen Reihe verglichen. Ferner sind die wenigen von *Schröder* angegebenen Werte unmittelbar vor der Ablösung, die nach dem *Schröder*schen Differenzenverfahren ermittelt sind, eingetragen. Während sich nach meinen Rechnungen von 1939 Ablösung bei $x=6{,}77$ ($\alpha=79{,}6°$) ergab[2], ergibt sich nach der neuen Differenzenrechnung $x=6{,}80$ ($\alpha=79{,}9°$). *Schröder* erhält Ablösung bei $x=6{,}87$ ($\alpha=80{,}7°$), die *Blasius*sche abgebrochene Reihe ergibt den (noch unverdient guten) Wert $x=6{,}98$ ($\alpha=82{,}0°$). Nach dem *Pohlhausen*-Verfahren[3] erhält man $x=6{,}94$ ($\alpha=81{,}6°$). Alle Resultate stimmen verhältnismäßig gut überein. Zum Vergleich der berechneten Ablösestelle mit den *Hiemenz*schen Messungen muß im vorliegenden Fall bemerkt werden, daß die gemessene äußere Geschwindigkeit U nach einem vor $x=6{,}8$ liegenden Wendepunkt in eine Waagerechte ausmündet, das Polynom (5.6) aber (Abb. 10) mit entgegengesetzter Krümmung nach Null steuert. Es wird also in Wirklichkeit der Wert des Druckanstiegs dp/dx hier kleiner anzusetzen sein, als er sich nach (5.6) errechnet. Sämtliche auf (5.6) fußende Rechnungen müssen also die Ablösung etwas zu früh gegenüber den wirklichen Verhältnissen ergeben, jedoch dürfte der hierdurch gegebene Fehler unerheblich sein.

Zahlentafel 4.

Ausgangsprofile für die Berechnung der Grenzschicht am Kreiszylinder.

$x=$	4,25	4,5
y_k	$u_{-1,k}$	$u_{0,k}$
0	0	0
0,4	1,2840	1,2896
0,8	2,2371	2,2675
1,2	2,8855	2,9491
1,6	3,2901	3,3832
2,0	3,5131	3,6280
2,4	3,6227	3,7488
2,8	3,6780	3,8134
3,2	3,6966	3,8347
3,6	3,7011	3,8392
4,0	3,7019	3,8397

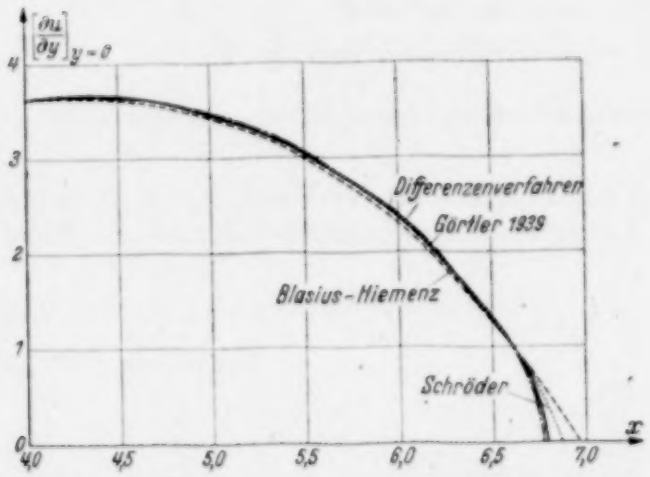


Abb. 12. Grenzschicht am *Hiemenz*schen Kreiszylinder: Verlauf von $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ nach verschiedenen Rechenverfahren. (Punktierter Verlauf nach *Schröder* nur unmittelbar vor der Ablösung bekannt.)

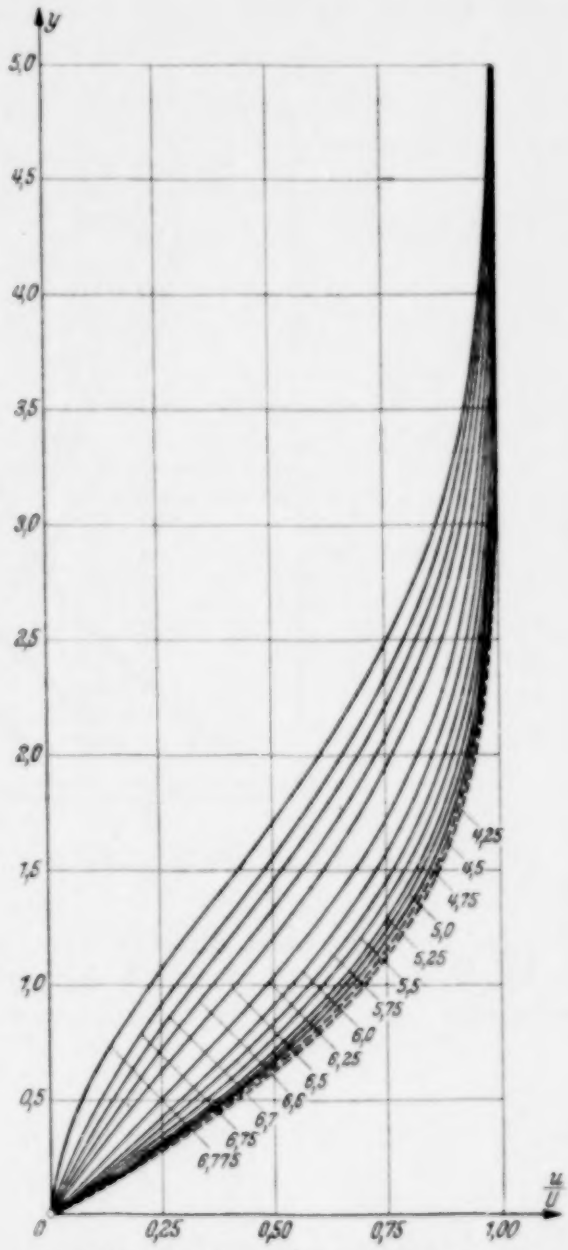


Abb. 13. Grenzschicht am *Hiemenz*schen Kreiszylinder: Profile u/U.

In Abb. 13 sind sämtliche von uns berechnete Profile u/U dargestellt. Abb. 14 gibt den Vergleich einiger Profile $u(x_i,y)$ mit den von uns 1939 berechneten Geschwindigkeitsverteilungen

[1] *H. Görtler*, a. a. O., s. Fußnote 2, S. 173.

[2] Ich habe seinerzeit die gröbere Aussage $x=6{,}8$ gewonnen. Eine sorgfältigere Extrapolation ergibt den obigen Wert $x=6{,}77$.

[3] *K. Schröder*, a. a. O., s. Fußnote 1, S. 173.

und mit den Ergebnissen der abgebrochenen *Blasius*schen Reihe. Gegenüber meiner früheren Rechnung zeigen sich Abweichungen nach der Seite höherer Werte, die zwar erst unmittelbar vor der Ablösungsstelle erheblicher werden (bei $x=6{,}75$ maximal 5 % bezogen auf U, während sie bis zum Druckminimum bei $x\approx 6$ noch unter 1 % bleiben), aber doch größer sind als wir dies erwarteten. Demgegenüber zeigt der Vergleich mit den von *Schröder* angegebenen Profilen in Abb. 15 recht befriedigende Übereinstimmung. In Abb. 15 ist überdies ein Vergleich mit dem *Pohlhausen*-Verfahren gegeben, das bekanntlich im vorliegenden Fall unerwartet gute Resultate liefert.

6. Verallgemeinerungen. Es sei im folgenden

$$\bar{r}_{i,k} = -\frac{l}{2h}\sum_{\nu=1}^{k-1}\triangle_{i,\nu} - \frac{l}{4h}\triangle_{i,k}\,. \tag{6.1}$$

a) Grenzschichten mit Absaugen und Ausblasen. Längs der Körperkontur $y=0$ werde kontinuierlich in x und stationär Flüssigkeit abgesaugt bzw. ausgeblasen. Bezeichnet

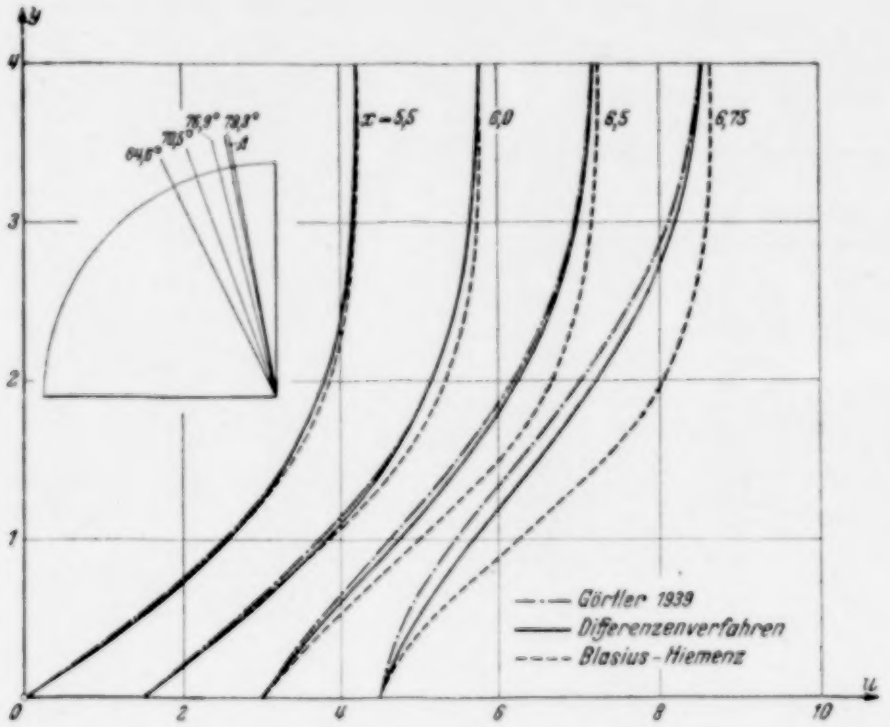


Abb. 14. Grenzschicht am *Hiemenz*schen Kreiszylinder: Vergleich einiger Profile nach verschiedenen Berechnungsverfahren.

$v=v_0(x)$ die vorgegebene Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit an der Wand ($v_0<0$ Absaugen, $v_0>0$ Ausblasen), so ändert sich gegenüber den bisherigen Betrachtungen lediglich die Randbedingung für v in $y=0$. Sie lautet nunmehr

$$v=v_0(x) \quad \text{für} \quad y=0\,. \tag{6.2}$$

War bisher $v_{i,k}=\bar{v}_{i,k}$ (siehe Abschnitt 3), so ist jetzt

$$v_{i,k}=\bar{v}_{i,k}+v_{i,0}\,, \tag{6.3}$$

wo $v_{i,0}=v(x_i,0)\;(=v_0(x_i))$ ist. Dementsprechend tritt in unserer Differenzengleichung (3.11) lediglich an Stelle des Faktors $\sum_{\nu=1}^{k-1}\triangle_{i,\nu}$ im dritten Term des Zählers der Faktor

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\triangle_{i,\nu} - \frac{2h}{l}\,v_{i,0}\,.$$

Das Rechenschema der Abb. 2 ist also nur dahingehend abzuändern, daß in der zweitletzten Spalte in der ersten Zeile (für $y=0$) nicht Null steht, sondern die (für jeden einzelnen Schritt

feste und vorgegebene) Zahl $(-2h/l)\,v_{i,0}$. Die Rechnung verläuft im übrigen unverändert*, die Rechenarbeit bleibt die gleiche. (Selbstverständlich kann man auch der Komponente u an der Wand einen von Null verschiedenen, vorgegebenen Wert erteilen.) Insofern die Absaugung oder das Ausblasen von $x=0$ an erfolgt, wäre es im Hinblick auf die Beschaffung der Ausgangsprofile erwünscht, die bisher benutzte *Blasius*sche Reihe auf diese Grenzbedingungen zu verallgemeinern, was eine einmalige, wenn auch erhebliche Rechenarbeit bedeutet. Man könnte sich dabei auf die allerersten Glieder beschränken.

b) Rotationssymmetrische Grenzschichten. Die Grenzschichtgleichung (2.2) bleibt formal unverändert bestehen, wenn x nunmehr die Bogenlänge längs einer Meridiankurve des rotationssymmetrischen Körpers bedeutet. Dagegen lautet die Kontinuitätsgleichung in grenzschichttheoretischer Näherung jetzt

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\,u)+\frac{\partial}{\partial y}(r\,v)=0\,,$$

wo $r(x)$ der senkrechte Abstand des Meridiankurvenpunktes x von der Symmetrieachse bedeutet. Ist $r_i=r(x_i)$, $r_i'=r'(x_i)$, so wird daher

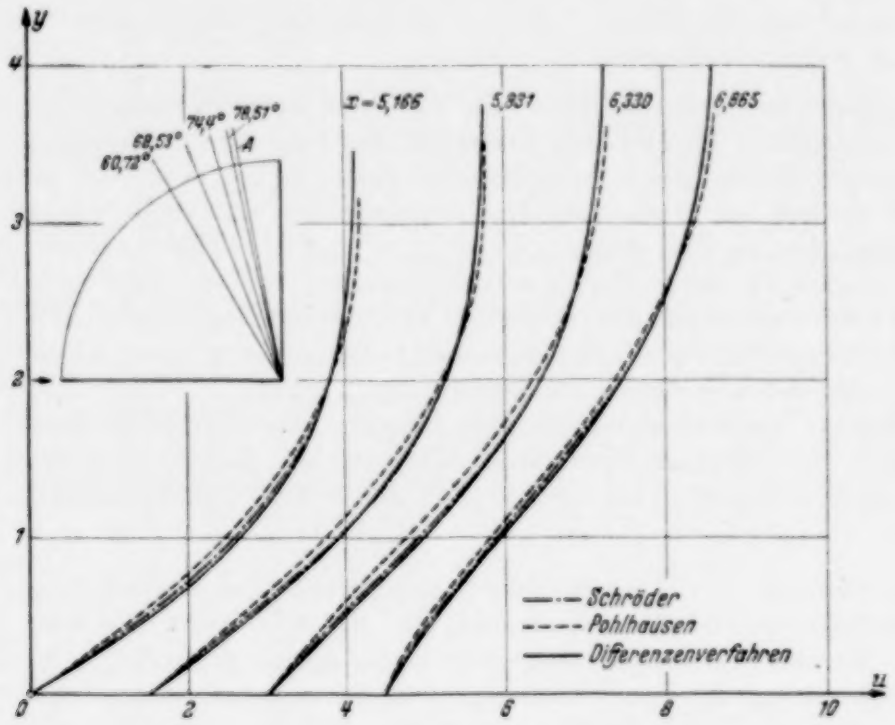


Abb. 15. Grenzschicht am *Hiemenz*schen Kreiszylinder: Weiterer Vergleich einiger Profile nach verschiedenen Berechnungsverfahren.

$$v_{i,k}=\bar{v}_{i,k}-\frac{r_i'}{r_i}\,\frac{l}{2}\sum_{\nu=0}^{k-1}\{u_{i,\nu}+u_{i,\nu+1}\}\,.$$

d. h. in der Differenzengleichung (3.11) tritt an Stelle des Faktors $\sum_{\nu=1}^{k-1}\triangle_{i,\nu}$ im dritten Term des Zählers nunmehr

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\triangle_{i,\nu}+\frac{r_i'\,h}{r_i}\sum_{\nu=0}^{k-1}\{u_{i,\nu}+u_{i,\nu+1}\}\,.$$

Im Rechenschema von Abb. 2 kommt also eine Spalte hinzu, nämlich die mit einer für jeden Schritt festen Zahl multiplizierte Trapezregelnäherung des Integrals $\int_0^y u\,dy$. Die Rechenarbeit wird also nicht wesentlich erhöht.

* Nachtrag zu 6a): Herr *R. Leuteritz* machte darauf aufmerksam, daß auch die zur Bestimmung von $\nabla_{i,0}^{x}$ und $\nabla_{i,1}^{x}$ benötigten Gleichungen (4.2) und (4.6) abzuändern sind, da ja die Grenzschichtbindungen (4.1) und (4.3) eine Änderung erfahren.

Die Ausgangsprofile verschafft man sich ähnlich wie im ebenen Fall durch Reihenentwicklung vom vorderen Staupunkt aus. Die Ermittlung der Beiwerte dieser Potenzreihe nach x, die selbst wieder Funktionen von y sind, läßt sich auf die Berechnung gewisser universeller Funktionen wie im ebenen Fall zurückführen. Die Tabellierung derselben für die drei ersten Beiwerte der nach ungeraden Potenzen von x fortschreitenden Reihe ist in sorgfältigen Rechnungen von *N. Frößling*[1] durchgeführt worden.

c) Instationäre Grenzschichten. In diesem Falle verschwindet in der Grenzschichtgleichung (2.2) das Glied $\partial u/\partial t$ nicht identisch in t und es ist $p=p(x,t)$. Ist zur Zeit $t=0$ eine geeignete Grenzschichtströmung für alle interessierenden x, y vorgegeben, ferner der Druckverlauf für $0\leqq t\leqq t_1$, so kann man durch direkte Berechnung von $\partial u/\partial t$ in allen Gitterpunkten x_i, y_k Schritt für Schritt für wachsende t im Zeitintervall $0\leqq t\leqq t_1$ den raumzeitlichen Verlauf der Grenzschichtströmung berechnen[2]. Man ist somit in der Lage — natürlich mit dem entsprechenden Mehraufwand an numerischer Rechnung gegenüber dem stationären Fall — etwa den Einfluß kleiner oder endlicher räumlich und zeitlich vorgegebenen Druckstörungen zu verfolgen, eine Möglichkeit, die im Hinblick auf die Stabilität der laminaren Grenzschichten und auf den laminar-turbulenten Umschlag interessiert. Man kann ferner etwa die zeitliche Wanderung der Ablösungsstelle, die man bisher bei Anfahrt aus der Ruhe nach den Reihenentwicklungen von *Blasius*[3] nur für kurze Zeiten nach Bewegungsbeginn berechnen konnte, bei vorgegebenem $p(x,t)$ weiter verfolgen.

Eine zweite Problemstellung ist die Frage nach der Wirkung einer stromaufwärts gegebenen Störung auf den weiteren Verlauf der Grenzschicht, was darauf hinauskommt, die bisher benötigten Ausgangsprofile für alle interessierenden Zeiten in ihrem zeitlich veränderlichen Verlauf vorzugeben und daraus bei gegebenem Druckverlauf den zeitlichen Verlauf der stromabwärts gelegenen Grenzschicht zu berechnen.

d) Umkehrung der Problemstellung. Das Rechenschema von Abb. 2 kann unverändert zur Lösung des umgekehrten Problems dienen: Fortsetzung einer Grenzschichtströmung in x-Richtung bei vorgegebener Wandschubspannung $(\partial u/\partial y)_{y=0}$, wobei dann die äußere Druckverteilung als Rechenergebnis erscheint. Im Schema von Abb. 2 ist dann nicht $\nabla^2_{i,0}$, sondern $\nabla_{i,0}$ vorgegeben. $\nabla^2_{i,1}$ läßt sich dann unmittelbar nach Definition (3.5) berechnen, dagegen ist $\nabla^2_{\lambda,0}$ aus (4.6) zu bestimmen, womit nach (4.2) der äußere Druckgradient resultiert.

7. Zusammenfassung. Im vorliegenden Bericht wurde ein Verfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten entwickelt und erprobt, das darauf beruht, die Grenzschichtdifferentialgleichung direkt durch eine Differenzengleichung zu ersetzen (Gl. 3.11), und es gestattet, eine ebene stationäre Grenzschicht durch Fortsetzung in Strömungsrichtung schrittweise zu ermitteln. Unser Bestreben war es, die von der Praxis gestellte Forderung zu erfüllen, eine strenge betriebsfertige Rechenmethode zu geben, welche — bei dem als normal zu bezeichnenden Genauigkeitsanspruch von $\frac{1}{2}$–1 % als zulässigen Fehler des Geschwindigkeitsprofils bezogen auf die zugehörige äußere Geschwindigkeit — mit einem Minimum an Arbeitsaufwand auf Grund eines einfachen Rechenschemas zum Ziele führt.

Bei dem genannten Genauigkeitsanspruch erfordert ein Rechenschritt (Schema der Zahlentafel 1 zuzüglich der graphischen Auftragung und gegebenenfalls Glättung) durchschnittlich etwa eine Stunde Arbeit eines eingeübten Rechners. Dabei werden normalerweise 10—15 Profilpunkte der Rechnung zugrunde zu legen sein.

Bei höheren Genauigkeitsansprüchen (etwa wenn das Rechenergebnis als Grundlage einer Stabilitätsuntersuchung dienen soll) könnte man durch Schrittverkleinerung und erhöhte Profilpunktzahl oder durch Verwendung finiter Ausdrücke von höherer als zweiter Näherung zum Ziele kommen.

[1] *N. Frößling*, a. a. O., s. Fußnote 2, S. 176. Eine weitgehende Fortführung dieser Rechnungen auf Glieder höherer Ordnung ist inzwischen von *Scholkemeier* durchgeführt worden (noch unveröffentlicht).

[2] Die Behandlung von Beispielen aus diesem Problemkreis hat bereits *K. Schröder* (a. a. O., s. Fußnote 3, S. 173) nach dem von ihm entwickelten Differenzenverfahren in Angriff genommen.

[3] *H. Blasius*, a. a. O., s. Fußnote 1, S. 176.

Die praktische Erprobung des Verfahrens wird in dem vorliegenden Bericht an drei Beispielen vorgeführt. Sie zeigt, daß das Verfahren bis unmittelbar vor einer eventuell vorhandenen Ablösungsstelle zuverlässig arbeitet. Durch den Ablösungspunkt hindurch kann man nur mit einem etwas erhöhten Rechenfehler weiterrechnen. Da jedoch normalerweise die Grenzschichtvernachlässigungen ohnehin an der Ablösungsstelle nicht mehr zulässig sind, könnte dieser Nachteil nur in Fällen sehr schwacher Ablösung, wo ein grenzschichttheoretisch vereinfachtes Weiterrechnen statthaft ist, Bedeutung gewinnen[1].

Das Verfahren ist in mehrfacher Hinsicht verallgemeinerungsfähig. Grenzschichten mit Absaugung oder Ausblasen lassen sich ohne Erhöhung des Rechenaufwandes nach demselben Schema, nur mit entsprechend veränderten, vorgegebenen Randwerten, berechnen. Bei rotationssymmetrischen Grenzschichten mit oder ohne Absaugung und Ausblasen wird die Rechenarbeit nur geringfügig erhöht. (Es kommt im wesentlichen eine Spalte zu dem bisherigen Rechenschema hinzu.) Das umgekehrte Problem, zu einer vorgegebenen Wandschubspannung die Grenzschicht und damit den äußeren Druckverlauf zu ermitteln, läßt sich nach demselben Schema wie oben, also auch ohne Änderung des Arbeitsaufwandes, lösen. Schließlich kann das vorliegende Verfahren in einfacher Weise auf die Berechnung instationärer Grenzschichten übertragen werden. Der Arbeitsaufwand erhöht sich hierbei natürlich entsprechend.

(Eingegangen am 18. Februar 1947.)

[1] Man muß jedoch überhaupt daran zweifeln, ob ein Weiterrechnen über die Ablösungsstelle hinaus im allgemeinen sinnvoll wäre. Denn die im Rückströmungsgebiet angetroffene Flüssigkeit kann ja durch irgendwelche Störungen aus dem noch nicht berechneten Gebiet größerer x-Werte bestimmend beeinflußt werden!

Eine Verallgemeinerung der Kreis- und Hyperbelfunktionen*.

Von **R. Grammel** in Stuttgart.

1. Einleitung. Es gibt technische und physikalische (und sicherlich auch mathematische) Fragestellungen, die zu einer Funktionenfamilie führen, welche man als naheliegende Verallgemeinerungen der Kreis- und Hyperbelfunktionen bezeichnen kann, da diese als Sonderfälle in ihnen enthalten sind. Ich zähle zunächst einige Probleme solcher Art auf.

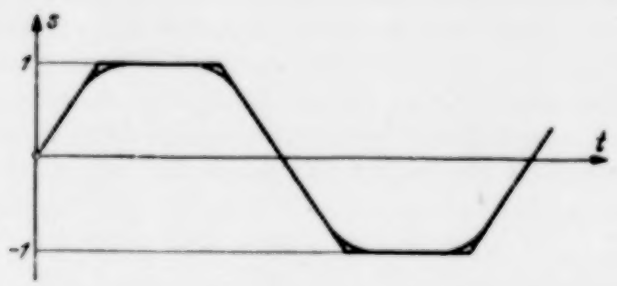


Abb. 1.

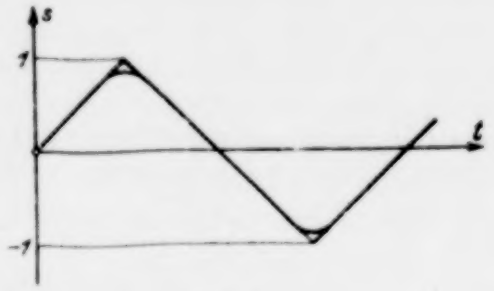


Abb. 2.

a) Bei kinematischen Maschinen, z. B. im Textilwesen, kommen Bewegungen vor, deren Weg-Zeit-Diagramm sich dem Streckenzug von Abb. 1 möglichst gut anschmiegen soll, jedoch mit „Abrundung" der Ecken derart, daß auch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung stetig sind. Die Lösung wird durch die später mit $s = \mathrm{Sin(n)}\, at$ bezeichnete Funktion mit hinreichend hohem geradem Index n dargestellt. Soll sich das Weg-Zeit-Diagramm in gleicher Weise möglichst gut dem Streckenzug von Abb. 2 anschmiegen, so lautet die Lösung $s = a\,\mathrm{Sin(n)}\, at\,\mathrm{Cos(n)}\, at$.

b) Man hat es bei Schwingungen manchmal mit Charakteristiken von der Form $x^\alpha(1-x^\beta)^\gamma$, z. B. $x^3\sqrt{1-x^4}$ (Abb. 3), also mit Differentialgleichungen von der Form $\ddot{x} + c\,x^\alpha(1-x^\beta)^\gamma = 0$ zu tun. Sie führen, falls $\alpha = n-1$, $\beta = n$, $\gamma = (n-2)/n$ ist, ebenfalls auf die Funktionen $\mathrm{Sin(n)}\, t$ und $\mathrm{Cos(n)}\, t$.

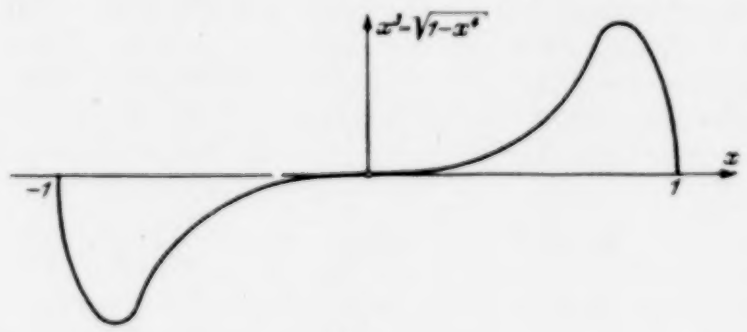


Abb. 3.

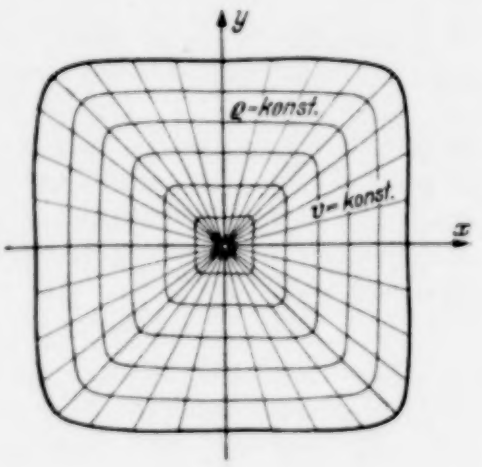


Abb. 4.

c) Das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ der zirkularpolarisierten Welle hat seine natürliche Verallgemeinerung in dem System $\dot{x} = y^p$, $\dot{y} = -x^p$ und liefert mit ungeradem p eine allgemeinere, ebenfalls geschlossene Polarisationsfigur, die durch die Lösung $x = \mathrm{Sin(p+1)}\, t$, $y = \mathrm{Cos(p+1)}\, t$ dargestellt wird. Für $\dot{x} = y^p$, $\dot{y} = x^p$ erhält man die entsprechende Verallgemeinerung der Hyperbelfunktionen.

d) Bei nahezu quadratischen Querschnitten (Abb. 4) kann es zweckmäßig sein, eine Verallgemeinerung von Polarkoordinaten ϱ, v zu verwenden, bei welchen die Kurven $\varrho = \mathrm{konst.}$

* Diese Arbeit war in einer ersten handschriftlichen Fassung Herrn *G. Faber* zu seinem 70. Geburtstag am 5. April 1947 gewidmet.

nahezu quadratische Kurven, die Linien $v=$konst. gerade Strahlen durch den Mittelpunkt sind. Sie hängen mit den kartesischen Koordinaten x und y folgendermaßen zusammen: $x=\varrho\,\mathrm{Cos(n)}\,v$, $y=\varrho\,\mathrm{Sin(n)}\,v$.

2. Die verallgemeinerten Kreisfunktionen. Man geht aus von der Gleichung

$$x^n+y^n=1\,, \tag{1}$$

worin n eine positive ganze Zahl ist, die man >1 voraussetzen darf. In einem kartesischen (x, y)-System definiert (1) die sogenannten Laméschen Kurven. Die Kurve (1) ist für gerades n eine geschlossene Kurve ohne reelle Doppel- und Wendepunkte und mit den vier Symmetrieachsen $x=0$, $y=0$, $x=\pm y$; für ungerades n ist sie eine einzügige Kurve ohne reellen Doppelpunkt, mit den zwei Wendepunkten (1:0) und (0:1), der Symmetrieachse $x=y$ und der Asymptote $x=-y$ (Abb. 5).

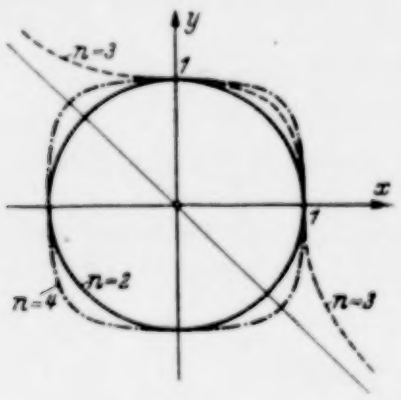


Abb. 5.

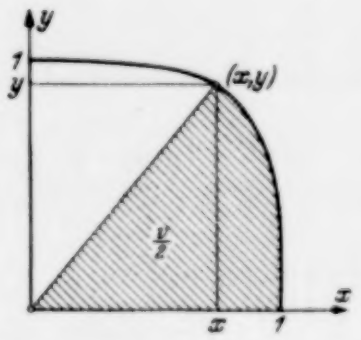


Abb. 6.

Der von der Kurve begrenzte Flächensektor zwischen der positiven x-Achse und dem Fahrstrahl vom Nullpunkt nach dem Kurvenpunkt (x, y) (Abb. 6) sei mit $\frac{1}{2}v$ bezeichnet, da er im Falle $n=2$ des Kreises gleich dem halben Zentriwinkel v des Sektors ist; sein doppelter Wert ist, wie man leicht findet,

$$v=\int_0^y x\,dy+\int_x^1 y\,dx=\int_{\binom{x=1}{y=0}}^{x,y}(x\,dy-y\,dx)\,. \tag{2}$$

Je nachdem man hierin nach (1) y in x oder x in y ausdrückt, erhält man das erste oder das zweite der folgenden Integrale:

$$v=\int_x^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{n-1}{n}}}\,, \qquad v=\int_0^y \frac{dy}{(1-y^n)^{\frac{n-1}{n}}}\,.$$

Man erkennt in diesen Integralen für den doppelten Sektorinhalt die unmittelbaren Verallgemeinerungen der Funktionen arc cos x und arc sin y, in die sie mit $n=2$ übergehen. Sie sollen daher mit $\mathrm{ArCos(n)}\,x$ und $\mathrm{ArSin(n)}\,y$ und ihre Umkehrfunktionen mit $\mathrm{Cos(n)}\,v$ und $\mathrm{Sin(n)}\,v$ bezeichnet werden, also

$$\left.\begin{aligned} v=\mathrm{ArCos(n)}\,x\equiv\int_x^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{n-1}{n}}}\,, &\qquad x=\mathrm{Cos(n)}\,v\,,\\ v=\mathrm{ArSin(n)}\,y=\int_0^y \frac{dy}{(1-y^n)^{\frac{n-1}{n}}}\,, &\qquad y=\mathrm{Sin(n)}\,v\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für sie gilt zufolge (1) die Formel

$$\mathrm{Cos(n)}^n\,v+\mathrm{Sin(n)}^n\,v=1\,. \tag{4}$$

Die weiteren Funktionen $\mathrm{Tg(n)}\,v$ und $\mathrm{Ctg(n)}\,v$ seien erklärt durch

$$\mathrm{Tg(n)}\,v=\mathrm{Sin(n)}\,v\,/\,\mathrm{Cos(n)}\,v\,.\quad \mathrm{Ctg(n)}\,v=1\,/\,\mathrm{Tg(n)}\,v\,. \tag{5}$$

Aus (3) folgt mit (1)

$$\frac{dx}{dv} = -(1-x^n)^{\frac{n-1}{n}} = -y^{n-1}, \quad \frac{dy}{dv} = (1-y^n)^{\frac{n-1}{n}} = x^{n-1},$$

und das sind die Differentiationsformeln der Funktionen $\mathrm{Cos(n)}\, v$ und $\mathrm{Sin(n)}\, v$, nämlich

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{Cos(n)}\, v) = -\mathrm{Sin(n)}^{n-1} v, \quad \frac{d}{dv}(\mathrm{Sin(n)}\, v) = \mathrm{Cos(n)}^{n-1} v. \tag{6}$$

Hieraus folgt gemäß (4)

$$\mathrm{Cos(n)}\, v \frac{d}{dv}(\mathrm{Sin(n)}\, v) - \mathrm{Sin(n)}\, v \frac{d}{dv}(\mathrm{Cos(n)}\, v) = 1. \tag{7}$$

Für $z = \mathrm{Tg(n)}\, v$ und $z' = \mathrm{Ctg(n)}\, v$ gelten die Differentiationsformeln

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{Tg(n)}\, v) = \frac{1}{\mathrm{Cos(n)}^2 v}, \quad \frac{d}{dv}(\mathrm{Ctg(n)}\, v) = -\frac{1}{\mathrm{Sin(n)}^2 v} \tag{8}$$

oder

$$\frac{dz}{dv} = (1+z^n)^{\frac{2}{n}}, \quad \frac{dz'}{dv} = -(1+z'^n)^{\frac{2}{n}},$$

woraus man auf die Umkehrfunktionen

$$v = \mathrm{Ar\,Tg(n)}\, z \equiv \int_0^z \frac{dz}{(1+z^n)^{\frac{2}{n}}}, \quad v = \mathrm{Ar\,Ctg(n)}\, z' \equiv \int_{z'}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^n)^{\frac{2}{n}}} \tag{9}$$

schließt.

Weiter kommt zufolge (6)

$$\frac{d^2}{dv^2}(\mathrm{Cos(n)}\, v) = -(n-1)\ \mathrm{Cos(n)}^{n-1} v\ \mathrm{Sin(n)}^{n-2} v,$$

$$\frac{d^2}{dv^2}(\mathrm{Sin(n)}\, v) = -(n-1)\ \mathrm{Sin(n)}^{n-1} v\ \mathrm{Cos(n)}^{n-2} v,$$

und dies besagt, daß die Funktionen $\mathrm{Cos(n)}\, v$ und $\mathrm{Sin(n)}\, v$ beide der Differentialgleichung $s'' + (n-1)\, s^{n-1} (1-s^n)^{\frac{n-2}{n}} = 0$ gehorchen, oder etwas allgemeiner: die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + a^2 s^{n-1} (a^n - s^n)^{\frac{n-2}{n}} = 0 \tag{10}$$

hat die partikulären Integrale

$$s = a\,\mathrm{Cos(n)}\left(\frac{a a^{n-2}}{\sqrt{n-1}} v + C\right), \quad s = a\,\mathrm{Sin(n)}\left(\frac{a a^{n-2}}{\sqrt{n-1}} v + D\right), \tag{11}$$

wo C und D beliebige Konstanten sind. [Die beiden Integrale (11) von (10) sind übrigens, wie aus den späteren Formeln (17) hervorgehen wird, nicht wesentlich verschieden und stellen keineswegs die allgemeinsten Integrale von (10) dar. Sie sind vielmehr diejenigen partikulären Lösungen, die für einen bestimmten Wert von v die spezielle Zuordnungsbedingung $s = a$, $ds/dv = 0$ erfüllen. Während für $n = 2$ auch das allgemeinste Integral mit der Zuordnungsbedingung $s = c + a$, $ds/dv = 0$ im Bereich der Kreisfunktionen bleibt, so führt für $n > 2$ das allgemeinste Integral von (10) aus dem Bereich der hier untersuchten Funktionen $\mathrm{Cos(n)}\, v$ und $\mathrm{Sin(n)}\, v$ hinaus.]

3. Die Verallgemeinerung der Zahl π. Man führt den Integralwert

$$\pi_n = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^n)^{\frac{n-1}{n}}} \tag{12}$$

ein, der offenbar das Vierfache des Flächensektors zwischen der positiven x- und der positiven y-Achse bedeutet, für gerades n also den von der ganzen Kurve umschlossenen Flächeninhalt, im besonderen für den Fall $n = 2$ des Kreises die Zahl π. Die Berechnung von π_n läßt sich auf die tabulierte Fakultät zurückführen. Es ist nämlich[1]

$$\pi_n = 2\frac{\left(\frac{1}{n}\right)!\left(-\frac{n-1}{n}\right)!}{\left(-\frac{n-2}{n}\right)!}. \tag{13}$$

[1] Vgl. *Jahnke-Emde*, Funktionentafeln, 3. Aufl., S. 20 f. sowie S. 14 u. 16.

Tafel 1.

n	π_n
2	3,142
3	3,533
4	3,708
5	3,801
6	3,855
7	3,890
8	3,914
9	3,931
10	3,943
∞	4,000

Man findet die Werte von Tafel 1 und vermutet gemäß der geometrischen Bedeutung den Grenzwert $\pi_\infty = 4$. Um dies zu bestätigen, führt man die Gammafunktion ein und hat

$$\pi_\infty = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} = 2\,\Gamma(1) \lim_{x\to 0} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}$$

oder wegen

$$\Gamma(2x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+\frac{1}{2})}{2^{1-2x}\sqrt{\pi}}, \quad \text{also} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 2$$

in der Tat $\pi_\infty = 4$. Die Werte von π_n liegen somit in dem verhältnismäßig engen Bereich $\pi \leqq \pi_n \leqq 4$.

Für nachher merken wir noch an, daß π_n auch durch folgenden Integralwert darstellbar ist:

$$\pi_n = 2\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^n)^{\frac{2}{n}}}, \tag{14}$$

da dieser ebenfalls auf (13) führt.

4. Die Eigenschaften der verallgemeinerten Kreisfunktionen. Nunmehr gilt zufolge (3) und (12) bzw. (9) und (14) zunächst für ungerades n

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ArCos(n)}\, z + \mathrm{ArSin(n)}\, z &= \tfrac{1}{2}\pi_n, \\ \mathrm{ArTg(n)}\, z + \mathrm{ArCtg(n)}\, z &= \tfrac{1}{2}\pi_n. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Für gerades n sind die Funktionen ArCos(n), ArSin(n), ArTg(n) und ArCtg(n) unendlich vieldeutig, wie geometrisch ohne weiteres einleuchtet. Man erklärt dann ihre Hauptwerte durch die Schranken

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq v \leqq \pi_n \quad &\text{für} \quad v = \mathrm{ArCos(n)}\, x, \\ -\tfrac{1}{2}\pi_n \leqq v \leqq +\tfrac{1}{2}\pi_n \quad &\text{für} \quad v = \mathrm{ArSin(n)}\, x, \\ -\tfrac{1}{2}\pi_n < v < \tfrac{1}{2}\pi_n \quad &\text{für} \quad v = \mathrm{ArTg(n)}\, x, \\ 0 < v < \pi_n \quad &\text{für} \quad v = \mathrm{ArCtg(n)}\, x \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

und versteht unter den Symbolen ArCos(n), ArSin(n), ArTg(n) und ArCtg(n) bei geradem n weiterhin stets diese Hauptwerte. Nun gilt (15) auch für gerades n.

Die Umkehrungen von (15) lauten

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos(n)}\,(\tfrac{1}{2}\pi_n - v) &= \mathrm{Sin(n)}\, v, & \mathrm{Sin(n)}\,(\tfrac{1}{2}\pi_n - v) &= \mathrm{Cos(n)}\, v, \\ \mathrm{Tg(n)}\,(\tfrac{1}{2}\pi_n - v) &= \mathrm{Ctg(n)}\, v, & \mathrm{Ctg(n)}\,(\tfrac{1}{2}\pi_n - v) &= \mathrm{Tg(n)}\, v. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Für weitere, zu den gewöhnlichen Kreisfunktionen analoge Formeln muß man sich auf gerades n beschränken und findet ebenso wie für $n = 2$ die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ArCos(n)}\,(-x) &= \pi_n - \mathrm{ArCos(n)}\, x, \\ \mathrm{ArSin(n)}\,(-x) &= -\mathrm{ArSin(n)}\, x, \\ \mathrm{ArTg(n)}\,(-x) &= -\mathrm{ArTg(n)}\, x, \\ \mathrm{ArCtg(n)}\,(-x) &= \pi_n - \mathrm{ArCtg(n)}\, x, \end{aligned}\right\} \quad (n \text{ gerade}) \tag{18}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos(n)}\,(-v) &= \mathrm{Cos(n)}\, v, & \mathrm{Sin(n)}\,(-v) &= -\mathrm{Sin(n)}\, v, \\ \mathrm{Cos(n)}\,(v \pm \pi_n) &= -\mathrm{Cos(n)}\, v, & \mathrm{Sin(n)}\,(v \pm \pi_n) &= -\mathrm{Sin(n)}\, v, \\ \mathrm{Cos(n)}\,(v \pm 2\pi_n) &= \mathrm{Cos(n)}\, v, & \mathrm{Sin(n)}\,(v \pm 2\pi_n) &= \mathrm{Sin(n)}\, v, \\ \mathrm{Tg(n)}\,(-v) &= -\mathrm{Tg(n)}\, v, & \mathrm{Ctg(n)}\,(-v) &= -\mathrm{Ctg(n)}\, v, \\ \mathrm{Tg(n)}\,(v \pm \pi_n) &= \mathrm{Tg(n)}\, v, & \mathrm{Ctg(n)}\,(v \pm \pi_n) &= \mathrm{Ctg(n)}\, v. \end{aligned}\right\} \quad (n \text{ gerade}) \tag{19}$$

Für gerades n haben also die Funktionen Cos(n) v und Sin(n) v die Periode $2\pi_n$, die Funktionen Tg(n) v und Ctg(n) v die Periode π_n, und zwar ist

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{Cos(n)}\ \nu\pi_n = (-1)^\nu\,, & \mathrm{Cos(n)}\ (\nu+\tfrac{1}{2})\pi_n = 0\,, \\ \mathrm{Sin(n)}\ \nu\pi_n = 0\,, & \mathrm{Sin(n)}\ (\nu+\tfrac{1}{2})\pi_n = (-1)^\nu\,, \\ \mathrm{Tg(n)}\ \nu\pi_n = 0\,, & \mathrm{Tg(n)}\ (\nu+\tfrac{1}{2})\pi_n = \infty\,, \\ \mathrm{Ctg(n)}\ \nu\pi_n = \infty\,, & \mathrm{Ctg(n)}\ (\nu+\tfrac{1}{2})\pi_n = 0\,. \end{array}\right| \begin{array}{l} (\nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots) \\ (n \text{ gerade}) \end{array} \qquad (20)$$

Die Funktionen Cos(n) v und Sin(n) v, als Ordinaten über der Abszisse v aufgetragen, liefern für gerades n zwei Kurven nach Art der cos- und sin-Linien. Wählt man den Maßstab der Abszissenachse für jedes n so, daß der Punkt π_n für die verschiedenen n an der gleichen Stelle liegt, so erhält man Abb. 7 beispielsweise für die Sin(n)-Kurven, die alle in dem engen Bereich zwischen der sin-Linie und einem gebrochenen Streckenzug liegen, welcher den Grenzfall $N \to \infty$ von $n = 2N$ darstellt. Das Entsprechende gilt von den (um

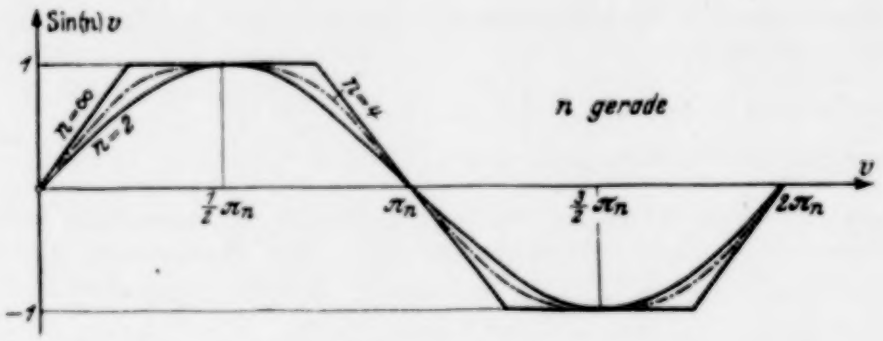


Abb. 7.

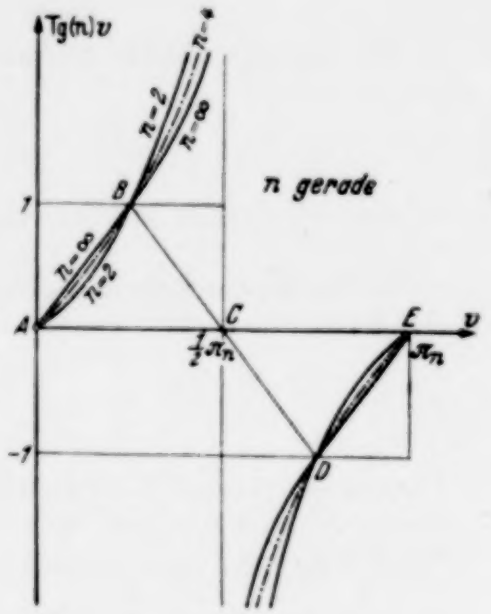


Abb. 8.

$-\frac{1}{2}\pi_n$ gegen die Sin(n)-Kurven verschobenen) Cos(n)-Kurven. Die Sin(n)- und Cos(n)-Kurven durchsetzen die Abszissenachse mit Wendetangenten von $(n+1)$-punktiger Berührung und der Steigung ± 1 und besitzen in ihren obersten und untersten Punkten waagerechte Tangenten mit n-punktiger Berührung, wie man leicht beweist.

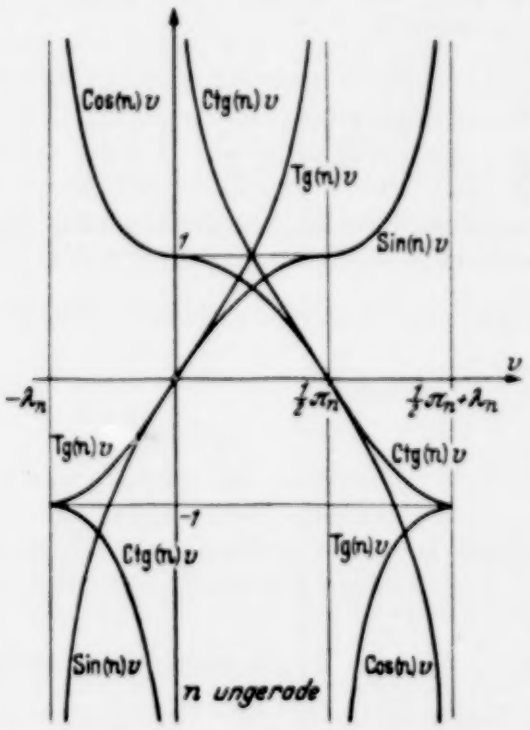


Abb. 9.

Die Kurven der Funktionen Tg(n) v und Ctg(n) v sind von der Art der tg- und ctg-Kurven, und zwar liegen sie (wenn man den soeben benützten Maßstab auf der Abszissenachse beibehält) alle in dem sehr engen Bereich zwischen der tg- bzw. ctg-Kurve und dem Linienzug des Grenzfalls $N \to \infty$, und dieser setzt sich gemäß Abb. 8 aus dem Streckenzug $ABCDE\ldots$ und Hyperbelästen zusammen, die den Streckenzug in B und D usw. berühren und die Asymptoten $v = \nu \cdot \frac{1}{2}\pi_n$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ haben. Die Tg(n)-Kurven gehen alle durch die Punkte mit den Abszissen $v = (2\nu+1)\frac{1}{4}\pi_n$ und den Ordinaten $(-1)^\nu$. Die (in Abb. 8 nicht eingetragenen) Ctg(n)-Kurven sind die Spiegelbilder der Tg(n)-Kurven, gespiegelt an einer der Geraden $v = (2\nu+1)\frac{1}{4}\pi_n$.

Für ungerades n haben die Funktionen Cos(n) v, Sin(n) v, Tg(n) v und Ctg(n) v keine reelle Periode. Ihren Verlauf zeigen die Kurven in Abb. 9. Sie sind nur in dem Bereich $-\lambda_n \leqq v \leqq \frac{1}{2}\pi_n + \lambda_n$ reell, wobei λ_n der gemeinsame Wert der drei folgenden Integrale ist:

Tafel 2.

n	λ_n
3	1,767
4	1,311
5	1,174
6	1,113
7	1,079
8	1,059
9	1,045
10	1,036
∞	1,000

$$\lambda_n = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{(1-t^n)^{\frac{n-1}{n}}} = \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{(1-t^n)^{\frac{n-1}{n}}} = \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^n)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)!\left(-\frac{2}{n}\right)!}{\left(-\frac{1}{n}\right)!}. \quad (21)$$

Man findet für λ_n die Tafel 2, in welcher sogleich auch die später benötigten Werte für gerades n eingetragen sind.

Wir merken noch an, daß für $n=3$ und $n=4$ ein Zusammenhang zwischen unseren Funktionen und den elliptischen Funktionen zu erwarten ist. In der Tat findet man für $n=3$

$$\mathrm{Cos(3)}\, v\, \mathrm{Sin(3)}\, v = \frac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\,\mathrm{cn}(k,u)}{\sqrt[3]{4}\,[1+\mathrm{cn}(k,u)]} \quad \left| \begin{array}{l} \text{mit } u = \sqrt[3]{4}\,\sqrt[4]{3}\, v - F\left(k, \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) \\ \text{und } k = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sin 75^\circ \end{array} \right. \quad (22)$$

und noch einfacher für $n=4$

$$\mathrm{Cos(4)}\, v\, \mathrm{Sin(4)}\, v = k\,\mathrm{cn}\left(k, \left\{2\,v - \mathrm{K}(k)\right\}\right) = k\,\frac{\mathrm{sn}(k,2\,v)}{\mathrm{dn}(k,2\,v)} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ. \quad (23)$$

Diese beiden Formeln gewinnt man in der Weise, daß man die (für $n=3$ und $n=4$ elliptischen) Integrale (3) auswertet, im Ergebnis $x=\mathrm{Cos}\, v$ setzt und nach dem dabei auftretenden Produkt $\mathrm{Cos}\, v\, \mathrm{Sin}\, v$ auflöst. Die Einzelrechnung mag hier unterdrückt werden.

Man kann die Formeln (22) und (23) dazu benützen, die Funktionen $\mathrm{Cos(n)}\, v$, $\mathrm{Sin(n)}\, v$, $\mathrm{Tg(n)}\, v$ für $n=3$ und $n=4$ zu berechnen; man kommt aber i. a. schneller und auch noch für höhere n zum Ziel, wenn man die folgenden Reihenentwicklungen verwendet.

5. Reihenentwicklungen. Die Funktionen $\mathrm{Ar\,Sin(n)}\, y$ und $\mathrm{Ar\,Tg(n)}\, z$ haben gemäß (3) und (9) folgende Reihenentwicklungen für gerades und ungerades n:

$$\mathrm{Ar\,Sin(}n\mathrm{)}\; y = y + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n-1)(2n-1)\ldots(\nu n-1)}{\nu!\,(\nu n+1)\,n^\nu}\, y^{\nu n+1} \qquad \left(|y| \leqq 1\right), \quad (24)$$

$$\mathrm{Ar\,Tg(}n\mathrm{)}\; z = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\,(n+2)\,(2n+2)\ldots((\nu-1)\,n+2)}{\nu!\,(\nu n+1)\,n^\nu}\, z^{\nu n+1} \qquad \left(|z| \leqq 1\right). \quad (25)$$

Die Reihen für $\mathrm{Cos(n)}\, v$ und $\mathrm{Sin(n)}\, v$ sind von der Form

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos(n)}\, v &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu\, a_\nu^{(n)}\, v^{\nu n}, \\ \mathrm{Sin(n)}\, v &= v + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu\, b_\nu^{(n)}\, v^{\nu n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Die positiven Koeffizienten $a_\nu^{(n)}$ und $b_\nu^{(n)}$ berechnet man am besten rekursiv mit Hilfe der Formeln (6) aus den Anfangskoeffizienten 1. Man findet

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(n)} &= \frac{1}{n}, \qquad b_1^{(n)} = \frac{n-1}{n+1}\, a_1^{(n)}, \qquad a_2^{(n)} = \frac{n-1}{2\,n}\, b_1^{(n)}, \\ b_2^{(n)} &= \frac{n-1}{2n+1}\left[\frac{1}{2}(n-2)\, a_1^{(n)2} + a_2^{(n)}\right], \qquad a_3^{(n)} = \frac{n-1}{3\,n}\left[\frac{1}{2}(n-2)\, b_1^{(n)2} + b_2^{(n)}\right], \\ b_3^{(n)} &= \frac{n-1}{3n+1}\left[\frac{1}{6}(n-2)(n-3)\, a_1^{(n)3} + (n-2)\, a_1^{(n)}\, a_2^{(n)} + a_3^{(n)}\right], \\ a_4^{(n)} &= \frac{n-1}{4\,n}\left[\frac{1}{6}(n-2)(n-3)\, b_1^{(n)3} + (n-2)\, b_1^{(n)}\, b_2^{(n)} + b_3^{(n)}\right], \\ b_4^{(n)} &= \frac{n-1}{4n+1}\left\{\frac{1}{2}(n-2)\left[(n-3)\, a_1^{(n)2}\, a_2^{(n)} + 2\, a_1^{(n)}\, a_3^{(n)} + a_2^{(n)2}\right] + a_4^{(n)}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

usw. Die Reihen konvergieren für kleine Argumente v sehr rasch. Ihren Konvergenzbereich abzugrenzen, muß einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben.

Setzt man (mit einer reellen Zahl p) $y = \mathrm{Sin(n)}\, v$, $t = \mathrm{Sin(n)}\, p\, v$, so ist

$$\mathrm{ArSin(n)}\, t = p\, \mathrm{ArSin(n)}\, y$$

oder, wenn man die Koeffizienten der Reihe (24) mit $c_\nu^{(n)}$ bezeichnet,

$$t + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(n)}\, t^{\nu n+1} = p\left(y + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(n)}\, y^{\nu n+1}\right).$$

Führt man hier den Ansatz

$$t = p\, y\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu^{(n)}\, y^{\nu n}\right)$$

ein, so lassen sich die Zahlen $\varkappa_\nu^{(n)}$ durch Koeffizientenvergleich berechnen. Man gewinnt so die Formel

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Sin(n)}\, p\, v = p\, \mathrm{Sin(n)}\, v\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu^{(n)}\, \mathrm{Sin(n)}^{\nu n} v\right) \\ &\text{mit} \\ &\varkappa_1^{(n)} = c_1^{(n)}\,(p^n - 1)\,, \\ &\varkappa_2^{(n)} = c_2^{(n)}\,(p^{2n} - 1) - c_1^{(n)2}\,(n+1)\,p^n\,(p^n - 1)\,, \\ &\varkappa_3^{(n)} = c_3^{(n)}\,(p^{3n} - 1) + \tfrac{1}{2}\, c_1^{(n)3}\,(n+1)\,p^n\,(p^n - 1)\,[(3n+2)\,p^n - n] - \\ &\qquad\qquad - c_1^{(n)}\, c_2^{(n)}\, p^n\,(p^n - 1)\,[(3n+2)\,p^n + (n+1)] \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

usw., wobei

$$c_\nu^{(n)} = \frac{(n-1)\,(2n-1)\,..\,(\nu n - 1)}{\nu!\,(\nu n + 1)\,n^\nu} \quad (29)$$

ist. In (28) sind für $n = 2$ und ganze Zahlen p die bekannten Formeln für $\sin p\, v$, ausgedrückt in den Potenzen von $\sin v$, enthalten. Die Konvergenz von (28) bedarf ebenfalls einer besonderen Untersuchung.

6. Integralformeln. Mit den verallgemeinerten Kreisfunktionen lassen sich zahlreiche Integralformeln aufstellen und an Hand von (6) und (8) nachprüfen:

$$\int \mathrm{Cos(n)}^{n-1} v\, dv = \mathrm{Sin(n)}\, v\,, \qquad \int \mathrm{Sin(n)}^{n-1} v\, dv = -\mathrm{Cos(n)}\, v\,. \quad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \mathrm{Cos(n)}^{n} v\, dv = \tfrac{1}{2}\left(v + \mathrm{Cos(n)}\, v\, \mathrm{Sin(n)}\, v\right), \\ &\int \mathrm{Sin(n)}^{n} v\, dv = \tfrac{1}{2}\left(v - \mathrm{Cos(n)}\, v\, \mathrm{Sin(n)}\, v\right), \end{aligned}\right| \quad (31)$$

$$\int \frac{dv}{\mathrm{Cos(n)}^2 v} = \mathrm{Tg(n)}\, v\,, \qquad \int \frac{dv}{\mathrm{Sin(n)}^2 v} = -\mathrm{Ctg(n)}\, v\,, \quad (32)$$

$$\int \frac{dv}{\mathrm{Cos(n)}\, v} = g\,(\mathrm{Sin(n)}\, v)\,, \qquad \int \frac{dv}{\mathrm{Sin(n)}\, v} = -g\,(\mathrm{Cos(n)}\, v)\,. \quad (33)$$

wobei $g(x) = \int \frac{dx}{1-x^n}$ ein für jedes positive ganze n auswertbares Integral ist:

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{dv}{\mathrm{Cos(n)}^n v} = \frac{n-2}{n-1}\, v + \frac{1}{n-1}\, \frac{\mathrm{Sin(n)}\, v}{\mathrm{Cos(n)}^{n-1} v}\,, \\ &\int \frac{dv}{\mathrm{Sin(n)}^n v} = \frac{n-2}{n-1}\, v - \frac{1}{n-1}\, \frac{\mathrm{Cos(n)}\, v}{\mathrm{Sin(n)}^{n-1} v}\,, \end{aligned}\right| \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \mathrm{Cos(n)}^{n-1} v\, \mathrm{Sin(n)}^m v\, dv = \frac{1}{m+1}\, \mathrm{Sin(n)}^{m+1} v\,, \\ &\int \mathrm{Sin(n)}^{n-1} v\, \mathrm{Cos(n)}^m v\, dv = -\frac{1}{m+1}\, \mathrm{Cos(n)}^{m+1} v\,, \end{aligned}\right| \; (m \neq -1) \quad (35)$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos(n)}^{n-1} v}{\mathrm{Sin(n)}\, v}\, dv = \ln \mathrm{Sin(n)}\, v, \quad \int \frac{\mathrm{Sin(n)}^{n-1} v}{\mathrm{Cos(n)}\, v}\, dv = -\ln \mathrm{Cos(n)}\, v, \tag{36}$$

$$\int \frac{dv}{\mathrm{Cos(n)}\, v\, \mathrm{Sin(n)}\, v} = \ln \mathrm{Tg(n)}\, v = -\ln \mathrm{Ctg(n)}\, v, \tag{37}$$

$$\int \left(\mathrm{Cos(n)}^n v - \mathrm{Sin(n)}^n v\right) dv = \mathrm{Cos(n)}\, v\, \mathrm{Sin(n)}\, v, \tag{38}$$

$$\int \left(\frac{1}{\mathrm{Cos(n)}^n v} - \frac{1}{\mathrm{Sin(n)}^n v}\right) dv = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\mathrm{Cos(n)}^{n-1} v\, \mathrm{Sin(n)}^{n-1} v}\right). \tag{39}$$

$$\int \left(\mathrm{Cos(n)}^n v - \mathrm{Sin(n)}^n v\right) \mathrm{Cos(n)}^m v\, \mathrm{Sin(n)}^m v\, dv = \frac{1}{m+1} \mathrm{Cos(n)}^{m+1} v\, \mathrm{Sin(n)}^{m+1} v \quad (m \neq -1), \tag{40}$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos(n)}^n v - \mathrm{Sin(n)}^n v}{\mathrm{Cos(n)}\, v\, \mathrm{Sin(n)}\, v}\, dv = \ln \left(\mathrm{Cos(n)}\, v\, \mathrm{Sin(n)}\, v\right). \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} \int \mathrm{Cos(n)}^m v\, dv &= \frac{1}{m-n+2} \mathrm{Cos(n)}^{m-n+1} v\, \mathrm{Sin(n)}\, v + \frac{m-n+1}{m-n+2} \int \mathrm{Cos(n)}^{m-n} v\, dv, \\ \int \mathrm{Sin(n)}^m v\, dv &= -\frac{1}{m-n+2} \mathrm{Sin(n)}^{m-n+1} v\, \mathrm{Cos(n)}\, v + \frac{m-n+1}{m-n+2} \int \mathrm{Sin(n)}^{m-n} v\, dv, \end{aligned}\right\} (m \neq n-2) \tag{42}$$

was für $m = \nu n$ (ν ganz positiv) rekursiv völlig auswertbar ist und für $m = \nu n - 1$ auf (33) führt:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dv}{\mathrm{Cos(n)}^m v} &= \frac{1}{m-1} \frac{\mathrm{Sin(n)}\, v}{\mathrm{Cos(n)}^{m-1} v} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dv}{\mathrm{Cos(n)}^{m-n} v}, \\ \int \frac{dv}{\mathrm{Sin(n)}^m v} &= -\frac{1}{m-1} \frac{\mathrm{Cos(n)}\, v}{\mathrm{Sin(n)}^{m-1} v} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dv}{\mathrm{Sin(n)}^{m-n} v}, \end{aligned}\right\} (m \neq 1) \tag{43}$$

was für $m = \nu n$ (ν ganz positiv) rekursiv völlig auswertbar ist:

$$\left.\begin{aligned} \int \mathrm{Tg(n)}^{n-1} v\, dv &= \frac{1}{n-2} \frac{1}{\mathrm{Cos(n)}^{n-2} v}, \\ \int \mathrm{Ctg(n)}^{n-1} v\, dv &= -\frac{1}{n-2} \frac{1}{\mathrm{Sin(n)}^{n-2} v}, \end{aligned}\right\} (n \neq 2) \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} \int \mathrm{Tg(n)}^m v\, dv &= \frac{1}{m-1} \frac{\mathrm{Sin(n)}^{m-n+1} v}{\mathrm{Cos(n)}^{m-1} v} - \frac{m-n+1}{m-1} \int \mathrm{Tg(n)}^{m-n} v\, dv, \\ \int \mathrm{Ctg(n)}^m v\, dv &= -\frac{1}{m-1} \frac{\mathrm{Cos(n)}^{m-n+1} v}{\mathrm{Sin(n)}^{m-1} v} - \frac{m-n+1}{m-1} \int \mathrm{Ctg(n)}^{m-n} v\, dv, \end{aligned}\right\} (m \neq 1) \tag{45}$$

was für $m = \nu n - 1$ (ν ganz positiv) rekursiv völlig auswertbar ist.

7. Die verallgemeinerten Hyperbelfunktionen. Es liegt nun nahe, anstatt von der Grundgleichung (1) von der Gleichung

$$x^n - y^n = 1 \tag{46}$$

auszugehen, worin n ebenfalls eine positive ganze Zahl > 1 sein soll. Die zugehörigen Kurven sind für gerades n hyperbelartig, für ungerades n die an der x-Achse gespiegelten Kurven (1). Für den wieder von der Kurve selbst und der positiven x-Achse sowie dem Fahrstrahl vom Nullpunkt nach dem Kurvenpunkt (x, y) begrenzten Flächensektor $v/2$ hat man

$$v = \int_0^y x\, dy - \int_1^x y\, dx = \int_{\binom{x=1}{y=0}}^{x,y} (x\, dy - y\, dx), \tag{47}$$

und dies geht, je nachdem man nach (46) y in x oder x in y ausdrückt, in das erste oder das zweite der folgenden Integrale über:

$$v = \int_1^x \frac{dx}{(x^n - 1)^{\frac{n-1}{n}}}, \qquad v = \int_0^y \frac{dy}{(y^n + 1)^{\frac{n-1}{n}}},$$

worin man die Verallgemeinerungen der Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,y$ erkennt. Man definiert daher

$$\left.\begin{aligned} v = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}(n)\,x &= \int_1^x \frac{dx}{(x^n-1)^{\frac{n-1}{n}}}, \qquad x = \mathfrak{Cof}(n)\,v, \\ v = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}(n)\,y &= \int_0^y \frac{dy}{(y^n+1)^{\frac{n-1}{n}}}, \qquad y = \mathfrak{Sin}(n)\,v \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

und weiter

$$\mathfrak{Tg}(n)\,v = \mathfrak{Sin}(n)\,v \,/\, \mathfrak{Cof}(n)\,v, \qquad \mathfrak{Ctg}(n)\,v = 1 \,/\, \mathfrak{Tg}(n)\,v. \tag{49}$$

Für diese Funktionen gilt

$$\mathfrak{Cof}(n)^n\,v - \mathfrak{Sin}(n)^n\,v = 1, \tag{50}$$

$$\frac{d}{dv}(\mathfrak{Cof}(n)\,v) = \mathfrak{Sin}(n)^{n-1}\,v, \qquad \frac{d}{dv}(\mathfrak{Sin}(n)\,v) = \mathfrak{Cof}(n)^{n-1}\,v, \tag{51}$$

$$\mathfrak{Cof}(n)\,v\,\frac{d}{dv}(\mathfrak{Sin}(n)\,v) - \mathfrak{Sin}(n)\,v\,\frac{d}{dv}(\mathfrak{Cof}(n)\,v) = 1, \tag{52}$$

$$\frac{d}{dv}(\mathfrak{Tg}(n)\,v) = \frac{1}{\mathfrak{Cof}(n)^2\,v}, \qquad \frac{d}{dv}(\mathfrak{Ctg}(n)\,v) = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}(n)^2\,v}, \tag{53}$$

woraus man auf die Umkehrfunktionen

$$v = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(n)\,z = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}, \qquad v = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}(n)\,z' = \int_{z'}^{\infty} \frac{dz}{(z^n-1)^{\frac{2}{n}}} \tag{54}$$

schließt.

Ferner kommt zufolge (51)

$$\frac{d^2}{dv^2}(\mathfrak{Cof}(n)\,v) = (n-1)\,\mathfrak{Cof}(n)^{n-1}\,v\,\mathfrak{Sin}(n)^{n-2}\,v, \quad \frac{d^2}{dv^2}(\mathfrak{Sin}(n)\,v) = (n-1)\,\mathfrak{Sin}(n)^{n-1}\,v\,\mathfrak{Cof}(n)^{n-2}\,v.$$

Somit hat die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{dv^2} - a^2 s^{n-1}(s^n - a^n)^{\frac{n-2}{n}} = 0 \tag{55}$$

das partikuläre Integral

$$s = a\,\mathfrak{Cof}(n)\left(\frac{a\,a^{n-2}}{\sqrt{n-1}}\,v + C\right), \tag{56}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{dv^2} - a^2 s^{n-1}(s^n + a^n)^{\frac{n-2}{n}} = 0 \tag{57}$$

das partikuläre Integral

$$s = a\,\mathfrak{Sin}(n)\left(\frac{a\,a^{n-2}}{\sqrt{n-1}}\,v + C\right). \tag{58}$$

Für ungerades n sind die verallgemeinerten Hyperbelfunktionen nicht wesentlich verschieden von den verallgemeinerten Kreisfunktionen. Denn man hat

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}(n)\,v &= \mathrm{Cos}(n)\,(-v), & \mathfrak{Sin}(n)\,v &= -\,\mathrm{Sin}(n)\,(-v), \\ \mathfrak{Tg}(n)\,v &= -\,\mathrm{Tg}(n)\,(-v), & \mathfrak{Ctg}(n)\,v &= -\,\mathrm{Ctg}(n)\,(-v), \\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}(n)\,x &= -\,\mathrm{Ar\,Cos}(n)\,x, & \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}(n)\,y &= -\,\mathrm{Ar\,Sin}(n)\,(-y), \\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(n)\,z &= -\,\mathrm{Ar\,Tg}(n)\,(-z), & \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}(n)\,z' &= -\,\mathrm{Ar\,Ctg}(n)\,(-z'). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Für gerades n gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}(n)\,(-v) &= \mathfrak{Cof}(n)\,v, & \mathfrak{Sin}(n)\,(-v) &= -\,\mathfrak{Sin}(n)\,v, \\ \mathfrak{Tg}(n)\,(-v) &= -\,\mathfrak{Tg}(n)\,v, & \mathfrak{Ctg}(n)\,(-v) &= -\,\mathfrak{Ctg}(n)\,v, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

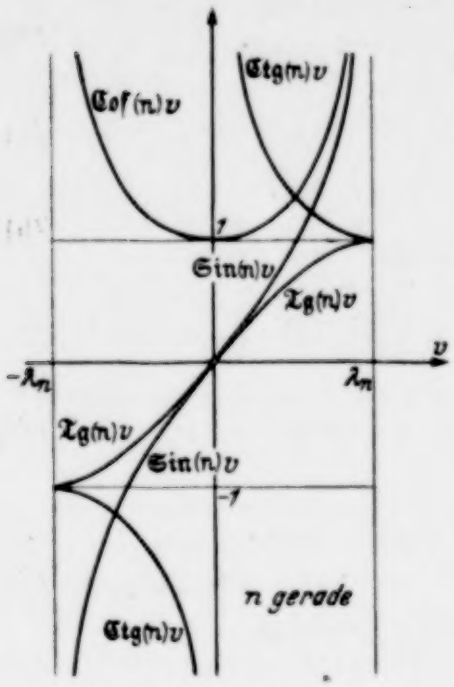


Abb. 10.

und die zugehörigen Cof(n)-, Sin(n)-, Tg(n)- und Ctg(n)-Kurven haben dann den in Abb. 10 skizzierten Verlauf mit den lotrechten Asymptoten $v = \pm \lambda_n$, wo λ_n der Integralausdruck (21), mit geradem n, ist.

Die Reihenentwicklungen lauten für gerades und ungerades n

$$\operatorname{Ar}\operatorname{Sin}(n)\, y = y + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(n-1)(2n-1)\ldots(\nu n-1)}{\nu!\,(\nu n+1)\,n^{\nu}}\, y^{\nu n+1}, \tag{61}$$

$$\operatorname{Ar}\operatorname{Tg}(n)\, z = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2(n+2)(2n+2)\ldots((\nu-1)n+2)}{\nu!\,(2n+1)\,n^{\nu}}\, z^{\nu n+1}, \tag{62}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cof}(n)\, v &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{(n)}\, v^{\nu n}, \\ \operatorname{Sin}(n)\, v &= v + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu}^{(n)}\, v^{\nu n+1} \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

mit den gleichen Koeffizienten (27) wie in (26) sowie

$$\operatorname{Sin}(n)\, p\, v = p \operatorname{Sin}(n)\, v \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \bar{\varkappa}_{\nu}^{(n)} \operatorname{Sin}(n)^{\nu n} v\right), \tag{64}$$

wobei die Koeffizienten $\bar{\varkappa}_{\nu}^{(n)}$ aus den Koeffizienten $\varkappa_{\nu}^{(n)}$ (28) dadurch entstehen, daß man darin die $c_{\nu}^{(n)}$ (29) durch

$$\bar{c}_{\nu}^{(n)} = (-1)^{\nu}\, c_{\nu}^{(n)} \tag{65}$$

ersetzt.

8. Integralformeln. Es gelten hier folgende Integralformeln:

$$\int \operatorname{Cof}(n)^{n-1} v\, dv = \operatorname{Sin}(n)\, v, \qquad \int \operatorname{Sin}(n)^{n-1} v\, dv = \operatorname{Cof}(n)\, v, \tag{66}$$

$$\left.\begin{aligned} \int \operatorname{Cof}(n)^{n}\, v\, dv &= \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{Cof}(n)\, v \operatorname{Sin}(n)\, v + v\right), \\ \int \operatorname{Sin}(n)^{n}\, v\, dv &= \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{Cof}(n)\, v \operatorname{Sin}(n)\, v - v\right), \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$\int \frac{dv}{\operatorname{Cof}(n)^2 v} = \operatorname{Tg}(n)\, v, \qquad \int \frac{dv}{\operatorname{Sin}(n)^2 v} = -\operatorname{Ctg}(n)\, v, \tag{68}$$

$$\int \frac{dv}{\operatorname{Cof}(n)\, v} = h\left(\operatorname{Sin}(n)\, v\right), \qquad \int \frac{dv}{\operatorname{Sin}(n)\, v} = -g\left(\operatorname{Cof}(n)\, v\right), \tag{69}$$

wobei $g(x) = \int \frac{dx}{1-x^n}$, $\qquad h(x) = \int \frac{dx}{1+x^n}$,

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dv}{\operatorname{Cof}(n)^n v} &= \frac{n-2}{n-1} v + \frac{1}{n-1} \frac{\operatorname{Sin}(n)\, v}{\operatorname{Cof}(n)^{n-1} v}, \\ \int \frac{dv}{\operatorname{Sin}(n)^n v} &= -\frac{n-2}{n-1} v - \frac{1}{n-1} \frac{\operatorname{Cof}(n)\, v}{\operatorname{Sin}(n)^{n-1} v}, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

$$\left.\begin{aligned} \int \operatorname{Cof}(n)^{n-1} v \operatorname{Sin}(n)^{m} v\, dv &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Sin}(n)^{m+1} v, \\ \int \operatorname{Sin}(n)^{n-1} v \operatorname{Cof}(n)^{m} v\, dv &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Cof}(n)^{m+1} v, \end{aligned}\right\} \quad (m \neq -1) \tag{71}$$

$$\int \frac{\operatorname{Cof}(n)^{n-1} v}{\operatorname{Sin}(n)\, v}\, dv = \ln \operatorname{Sin}(n)\, v, \qquad \int \frac{\operatorname{Sin}(n)^{n-1} v}{\operatorname{Cof}(n)\, v}\, dv = \ln \operatorname{Cof}(n)\, v, \tag{72}$$

$$\int \frac{dv}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})\,v\;\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})\,v} = \ln \mathfrak{Tg}(\mathfrak{n})\,v = -\ln \mathfrak{Ctg}(\mathfrak{n})\,v, \tag{73}$$

$$\int \left(\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^n\,v + \mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^n\,v\right) dv = \mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})\,v\;\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})\,v, \tag{74}$$

$$\int \left(\frac{1}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^n\,v} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^n\,v}\right) dv = -\frac{1}{n-1}\;\frac{1}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{n-1}\,v\;\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{n-1}\,v}, \tag{75}$$

$$\int (\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^n\,v + \mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^n\,v)\,\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^m\,v\,\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^m\,v\,dv = \frac{1}{m+1}\,\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{m+1}\,v\,\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{m+1}\,v \quad (m \neq -1), \tag{76}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^n\,v + \mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^n\,v}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})\,v\;\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})\,v}\,dv = \ln\left(\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})\,v\;\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})\,v\right). \tag{77}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^m\,v\,dv &= \frac{1}{m-n+2}\,\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{m-n+1}\,v\;\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})\,v + \frac{m-n+1}{m-n+2}\int \mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{m-n}\,v\,dv,\\
\int \mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^m\,v\,dv &= \frac{1}{m-n+2}\,\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{m-n+1}\,v\;\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})\,v - \frac{m-n+1}{m-n+2}\int \mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{m-n}\,v\,dv,
\end{aligned}\right\}\ (m \neq n-2) \tag{78}$$

was für $m = \nu n$ (ν ganz positiv) rekursiv völlig auswertbar ist und für $m = \nu n - 1$ auf (69) führt;

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{dv}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^m\,v} &= \frac{1}{m-1}\;\frac{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})\,v}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{m-1}\,v} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dv}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{m-n}\,v},\\
\int \frac{dv}{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^m\,v} &= -\frac{1}{m-1}\;\frac{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})\,v}{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{m-1}\,v} - \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dv}{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{m-n}\,v},
\end{aligned}\right\}\ (m \neq 1) \tag{79}$$

was für $m = \nu n$ (ν ganz positiv) rekursiv völlig auswertbar ist;

$$\left.\begin{aligned}
\int \mathfrak{Tg}(\mathfrak{n})^{n-1}\,v\,dv &= -\frac{1}{n-2}\;\frac{1}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{n-2}\,v},\\
\int \mathfrak{Ctg}(\mathfrak{n})^{n-1}\,v\,dv &= -\frac{1}{n-2}\;\frac{1}{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{n-2}\,v},
\end{aligned}\right\}\ (n \neq 2) \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \mathfrak{Tg}(\mathfrak{n})^m\,v\,dv &= -\frac{1}{m-1}\;\frac{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{m-n+1}\,v}{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{m-1}\,v} + \frac{m-n+1}{m-1}\int \mathfrak{Tg}(\mathfrak{n})^{m-n}\,v\,dv,\\
\int \mathfrak{Ctg}(\mathfrak{n})^m\,v\,dv &= -\frac{1}{m-1}\;\frac{\mathfrak{Cof}(\mathfrak{n})^{m-n+1}\,v}{\mathfrak{Sin}(\mathfrak{n})^{m-1}\,v} + \frac{m-n+1}{m-1}\int \mathfrak{Ctg}(\mathfrak{n})^{m-n}\,v\,dv,
\end{aligned}\right\}\ (m \neq 1) \tag{81}$$

was für $m = \nu n - 1$ (ν ganz positiv) rekursiv völlig auswertbar ist.

9. Verallgemeinerte Kreis- und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument. Aus den Reihen (26) und (63) schließt man für rein imaginäres Argument auf folgende Beziehungen, in denen ein Querstrich die konjugiert komplexe Größe bedeutet:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Cos}(4n)\,i\,v = \mathrm{Cos}(4n)\,v, && \mathrm{Sin}(4n)\,i\,v = i\,\mathrm{Sin}(4n)\,v,\\
&\mathrm{Tg}(4n)\,i\,v = i\,\mathrm{Tg}(4n)\,v, && \mathrm{Ctg}(4n)\,i\,v = -\mathrm{Ctg}(4n)\,v,\\
&\mathrm{Cos}(4n\text{-}2)\,i\,v = \mathfrak{Cof}(4n\text{-}2)\,v, && \mathrm{Sin}(4n\text{-}2)\,i\,v = i\,\mathfrak{Sin}(4n\text{-}2)\,v,\\
&\mathrm{Tg}(4n\text{-}2)\,i\,v = i\,\mathfrak{Tg}(4n\text{-}2)\,v, && \mathrm{Ctg}(4n\text{-}2)\,i\,v = -i\,\mathfrak{Ctg}(4n\text{-}2)\,v,\\
&\mathrm{Cos}(2n\text{-}1)\,i\,v = \overline{\mathfrak{Cof}(2n\text{-}1)\,i\,v}, && \mathrm{Sin}(2n\text{-}1)\,i\,v = -\overline{\mathfrak{Sin}(2n\text{-}1)\,i\,v},\\
&\mathrm{Tg}(2n\text{-}1)\,i\,v = -\overline{\mathfrak{Tg}(2n\text{-}1)\,i\,v}, && \mathrm{Ctg}(2n\text{-}1)\,i\,v = -\overline{\mathfrak{Ctg}(2n\text{-}1)\,i\,v},
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{Cof}(4n)\, i\,v = \mathfrak{Cof}(4n)\, v, && \mathfrak{Sin}(4n)\, i\,v = i\,\mathfrak{Sin}(4n)\, v,\\
&\mathfrak{Tg}(4n)\, i\,v = i\,\mathfrak{Tg}(4n)\, v, && \mathfrak{Ctg}(4n)\, i\,v = -\,\mathfrak{Ctg}(4n)\, v,\\
&\mathfrak{Cof}(4n\text{-}2)\, i\,v = \mathrm{Cos}(4n\text{-}2)\, v, && \mathfrak{Sin}(4n\text{-}2)\, i\,v = i\,\mathrm{Sin}(4n\text{-}2)\, v,\\
&\mathfrak{Tg}(4n\text{-}2)\, i\,v = i\,\mathrm{Tg}(4n\text{-}2)\, v, && \mathfrak{Ctg}(4n\text{-}2)\, i\,v = -\,i\,\mathrm{Ctg}(4n\text{-}2)\, v,\\
&\mathfrak{Cof}(2n\text{-}1)\, i\,v = \overline{\mathrm{Cos}(2n\text{-}1)\, i\,v}, && \mathfrak{Sin}(2n\text{-}1)\, i\,v = -\,\overline{\mathrm{Sin}(2n\text{-}1)\, i\,v},\\
&\mathfrak{Tg}(2n\text{-}1)\, i\,v = -\,\overline{\mathrm{Tg}(2n\text{-}1)\, i\,v}, && \mathfrak{Ctg}(2n\text{-}1)\, i\,v = -\,\overline{\mathrm{Ctg}(2n\text{-}1)\, i\,v}.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Während für gerades n die Funktionen mit rein imaginärem Argument entweder reell oder rein imaginär sind, so werden sie für ungerades n und rein imaginäres Argument komplex.

10. Verallgemeinerung auf nichtganze n. Die Frage, inwieweit alle diese Ergebnisse auch für nichtganze und für negative n gültig bleiben, ausgenommen natürlich die Formeln (82) und (83), hat folgende Antwort.

Wenn n eine positive rationale Zahl ist, nämlich $n = q/r$, wo q und r teilerfremde positive ganze Zahlen sind, oder wenn n eine positive irrationale Zahl ist, so hat man drei Fälle zu unterscheiden:

a) r ungerade, q gerade. Dann unterscheiden sich die Kurven (1) und (46) nicht wesentlich von ihrem bisher vorausgesetzten Verlauf für gerades ganzes n, und die bisherigen Formeln für gerades n können übernommen werden (auch wenn $q/r < 2$ ist).

b) r ungerade, q ungerade. Dann unterscheiden sich die Kurven (1) und (46) nicht wesentlich von ihrem Verlauf für ungerades ganzes n, und die bisherigen Formeln für ungerades n können übernommen werden (auch wenn $q/r < 2$ ist). Hierher gehört auch der triviale Fall $n = 1$, der auf die lineare Funktion führt.

c) r gerade. Dann sind die Kurven (1) und (46) nur für positive Werte von x und y definiert, also im Falle (1) zwischen den Punkten $(1;0)$ und $(0;1)$, im Falle (46) zwischen dem Punkte $(1;0)$ und der Asymptote $x = y$. Die bisherigen Formeln können insoweit übernommen werden, als sie im Bereich $x > 0$, $y > 0$ liegen.

d) Das gleiche wie im Falle c) gilt für irrationale Zahlen n.

Für $n = 0$ und für negative Zahlen n gelten unsere Ergebnisse offensichtlich nicht. Für $n = 0$ gibt es keine Kurven (1) und (46), und für negative n lassen sich auf die bisherige Weise überhaupt keine endlichen Flächeninhalte definieren.

11. Weitere Verallgemeinerungen. Man kann schließlich von einer viel allgemeineren Kurve durch den Punkt $(1;0)$ ausgehen, von welcher man im wesentlichen nur voraussetzen muß, daß der vom Nullpunkt nach einem Kurvenpunkt (x, y) gezogene Fahrstrahl eine eindeutige und stetige Funktion des Winkels ist, der von diesem Fahrstrahl und der positiven x-Achse gebildet wird. Wird diese Kurve durch die Gleichungen

$$f(x,y) = 1 \text{ oder aufgelöst } y = \varphi(x) \text{ oder } x = \psi(y) \tag{84}$$

dargestellt, die so oft als nötig differentiierbar sein sollen, so folgen aus dem doppelten Flächensektor v, der wie früher erklärt sei, nämlich

$$v = \int_{\binom{x=1}{y=0}}^{x,y} (x\,dy - y\,dx),$$

sofort die Funktionen

$$
\left.
\begin{aligned}
v &= \mathrm{Ar\,C}(x) = \int_1^x [x\varphi'(x) - \varphi(x)]\,dx, && x = \mathrm{C}(v),\\
v &= \mathrm{Ar\,S}(y) = \int_0^y [\psi(y) - y\psi'(y)]\,dy, && y = \mathrm{S}(v).
\end{aligned}
\right\} \tag{85}
$$

Sie gehorchen der Gleichung

$$f(\mathrm{C}(v), \mathrm{S}(v)) = 1 \tag{86}$$

und haben die Differentialformeln

$$\frac{d\,\mathrm{C}}{d\,v} = \frac{1}{\mathrm{C}\,\varphi'(\mathrm{C}) - \mathrm{S}}, \qquad \frac{d\,\mathrm{S}}{d\,v} = \frac{1}{\mathrm{C} - \mathrm{S}\,\psi'(\mathrm{S})}. \tag{87}$$

Wegen

$$\varphi'(\mathrm{C}) = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{C}'} \qquad \text{und} \qquad \psi'(\mathrm{S}) = \frac{d\,x}{d\,y} = \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{S}'}$$

folgt aus jeder der Formeln (87) die sehr allgemeine Formel [vgl. schon (7) und (52)]

$$\mathrm{C}\frac{d\,\mathrm{S}}{d\,v} - \mathrm{S}\frac{d\,\mathrm{C}}{d\,v} = 1, \tag{88}$$

woraus man die ebenfalls sehr allgemeinen Formeln [vgl. schon (32) und (68)]

$$\int \frac{d\,v}{\mathrm{C}^2} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{C}}, \qquad \int \frac{d\,v}{\mathrm{S}^2} = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}} \tag{89}$$

herleitet.

Ist insbesondere $f(x, y)$ eine in x und y homogene Funktion vom Grade n (wobei n nicht notwendig eine ganze Zahl zu sein braucht), und sind f_x und f_y ihre partiellen Ableitungen, so findet man schließlich aus (87) mit Hilfe von $\varphi' = -f_x/f_y$ und $\psi' = -f_y/f_x$ sowie $x f_x + y f_y = n$ die folgenden Formeln:

$$\frac{d\,\mathrm{C}}{d\,v} = -\frac{1}{n} f_y(\mathrm{C}, \mathrm{S}), \qquad \frac{d\,\mathrm{S}}{d\,v} = \frac{1}{n} f_x(\mathrm{C}, \mathrm{S}), \tag{90}$$

in welchen die Differentialformeln (6) und (51) als Sonderfälle enthalten sind.

Ein naheliegendes Beispiel liefern die Kurven

$$x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + y^n = 1. \tag{91}$$

Sie führen mit $n = 2$ auf die Kreis- und Hyperbelfunktionen, für $n > 2$ auf neue Funktionen, die nicht zur Familie der Cos(n) und Sin(n) gehören, deren Reihenentwicklungen sich aber in jedem Falle mit Hilfe der Formeln (90) herstellen lassen.

(Eingegangen am 7. März 1947.)

Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung*.

Von **H. Schlichting** in Braunschweig.

1. Einleitung. Der Gedanke der Grenzschichtbeeinflussung durch Absaugung ist so alt wie die Grenzschichttheorie selbst. Bereits in seiner grundlegenden Grenzschichtarbeit aus dem Jahr 1904 hat *L. Prandtl*[1] auf diese Möglichkeit als ein wirksames Mittel zur Verringerung des Widerstandes, insbesondere des Druckwiderstandes, hingewiesen und Strömungsbilder für den Kreiszylinder mit Absaugung angegeben. Später ist dann die Grenzschichtabsaugung sehr vielfach für die Steigerung des Maximalauftriebes beim Tragflügel angewendet worden[2]. In letzter Zeit hat die Grenzschichtabsaugung aber auch für das Widerstandsproblem wieder eine gewisse Bedeutung gewonnen. Wie Versuche von *Ackeret*[3] gezeigt haben, besteht die Möglichkeit, den Reibungswiderstand eines umströmten Körpers zu vermindern durch Laminarhaltung der Grenzschicht durch Absaugung. Durch Absaugung der Grenzschicht kann unter Umständen die laminare Laufstrecke wesentlich vergrößert werden und dadurch der gesamte Reibungswiderstand erheblich vermindert werden.

Es erscheint deshalb angebracht, ein Rechenverfahren zu besitzen, welches es gestattet, den Verlauf der laminaren Grenzschicht an einem umströmten Körper zu verfolgen bei beliebiger Gestalt des Körpers und beliebiger Verteilung der Absaugegeschwindigkeit längs der Körperkontur. Eine exakte Berechnung der Grenzschicht mit Absaugung aus den Grenzschichtdifferentialgleichungen stößt ebenso wie beim Fall der undurchlässigen Wand auf unüberwindliche rechnerische Schwierigkeiten. Wir wollen deshalb ein Näherungsverfahren entwickeln, welches sich an die bekannten Näherungsverfahren für die laminare Grenzschicht bei undurchlässiger Wand anschließt. Zur Theorie der Grenzschicht mit Absaugung liegen bisher einige Einzellösungen vor. So wurde von *H. Schlichting*[4],[5] die längsangeströmte ebene Platte mit homogener Absaugung untersucht. Dabei ergibt sich in großem Abstand von der Plattenvorderkante eine konstante Grenzschichtdicke und ein „asymptotische Asbsaugeprofil", welches sich mit der Lauflänge nicht mehr ändert. Ferner wurde von *H. Schlichting* und *K. Bußmann*[6] die ebene Staupunktströmung mit homogener Absaugung sowie die längsangeströmte Platte mit einer Absaugegeschwindigkeit $v_0(x) \sim 1/\sqrt{x}$ untersucht (x = Abstand von der Plattenvorderkante). In allen Fällen ergab sich eine starke Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung und der übrigen Grenzschichtgrößen von dem Mengenbeiwert der Absaugung.

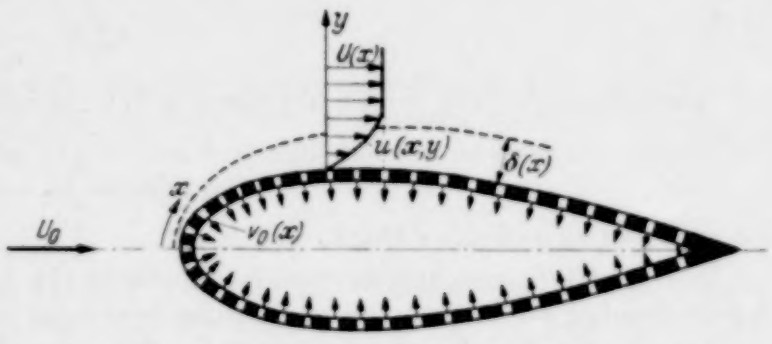


Abb. 1. Erläuterungsskizze für die Grenzschicht mit Absaugung bei beliebiger Körperform.

2. Die Grenzschichtgleichungen mit Absaugung. Wir betrachten im folgenden das ebene Problem, also die Grenzschicht an einem umströmten zylindrischen Körper (Abb. 1). Es seien x, y die Koordinaten längs der Wand bzw. senkrecht zur Wand, U_0 die Anströmungsgeschwindig-

* Auszugsweise vorgetragen auf der GAMM-Sitzung in Göttingen am 4. Februar 1945, anläßlich des 70. Geburtstages von Professor *Prandtl*.

[1] *L. Prandtl*, Über Flüssigkeitsbewegung mit sehr kleiner Reibung. Verhdlg. III. Internat. Math. Kongreß Heidelberg 1904; wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik". Göttingen 1927.

[2] *O. Schrenk*, Luftfahrtforschung 21 (1935) S. 16.

[3] *J. Ackeret, M. Ras, W. Pfenninger*, Naturwissenschaften, 29 (1941) S. 622.

[4] *H. Schlichting*, Luftfahrtforschung 19 (1942) S. 179.

[5] *H. Schlichting*, Luftfahrtforschung 19 (1942) S. 293.

[6] *H. Schlichting* und *K. Bußmann*, Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, 7 B (1943), Heft 2.

keit und $U(x)$ die Potentialströmung außerhalb der Reibungsschicht. Es sei ferner $u(x,y)$, $v(x,y)$ die Geschwindigkeitsverteilung in der Reibungsschicht. Das Absaugen und Ausblasen wird dadurch in die Rechnung eingeführt, daß längs der Wand eine von Null verschiedene und im allgemeinen mit x veränderliche Normalgeschwindigkeit $v_0(x)$ vorgegeben ist:

$$v_0(x) > 0\text{: Ausblasen;}\quad v_0(x) < 0\text{: Absaugen .}$$

Dabei kann angenommen werden, daß v_0/U_0 sehr klein ist (0,01 bis 0,0001). Wir wollen nur den Fall kontinuierlicher Absaugung betrachten, wo $v_0(x)$ eine stetige Funktion von x ist. Man kann sich diesen Fall durch eine poröse Wand verwirklicht denken. Die Tangentialgeschwindigkeit an der Wand soll in jedem Falle gleich Null sein. Die Grenzschichtdifferentialgleichungen mit Randbedingungen lauten dann für den stationären Fall

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} y=0&: u=0\,,\ v=v_0(x)\,,\\ y=\infty&: u=U(x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Das Gleichungssystem (1), (2) unterscheidet sich von der gewöhnlichen Grenzschichttheorie lediglich dadurch, daß die eine Randbedingung bei $y=0$ abgeändert ist von $v=0$ auf $v=v_0(x)\neq 0$.

Eine spezielle Lösung der Gleichungen (1), (2), die grundlegend ist für die Theorie der Grenzschicht mit Absaugung, und die auch im folgenden wieder verwendet wird, ist diejenige für die längsangeströmte ebene Platte mit homogener Absaugung, also $v_0(x)=v_0=\text{konst.}<0$, und $U(x)=U_0$. In diesem Fall[1] wird in einiger Entfernung von der Plattenvorderkante die Grenzschichtdicke konstant und die Geschwindigkeitsverteilung unabhängig von x. Wegen $\partial u/\partial x=0$ und $\partial v/\partial y=0$ ergibt sich für diesen Fall aus (1), (2)

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)=u(y)&=U_0\left(1-e^{\frac{y\,v_0}{\nu}}\right)=U_0(1-e^{-y/\delta^*})\,,\\ v(x,y)&=v_0=\text{konst} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

mit

$$\delta^*_\infty=\frac{\nu}{-v_0} \tag{4}$$

als Verdrängungsdicke dieser asymptotischen Lösung. Die Wandschubspannung für diese Lösung:

$$\tau_{0\infty}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=-\varrho U_0 v_0 \tag{4a}$$

ist unabhängig von der Zähigkeit.

Um die Grenzschichtdifferentialgleichungen (1), (2) für den allgemeinen Fall zu lösen, wo die Körperkontur und somit $U(x)$ und außerdem $v_0(x)$ beliebig vorgegeben sind, könnte man daran denken, in gleicher Weise wie bei undurchlässiger Wand[2] die Geschwindigkeitsverteilung vom Staupunkt aus in eine Reihe nach x zu entwickeln, wobei die Koeffizienten dieser Reihe von y abhängige Funktionen sind, für welche sich gewöhnliche Differentialgleichungen ergeben. Dieses Verfahren führt für schlanke Körperformen jedoch auf erhebliche Konvergenzschwierigkeiten und kommt deshalb für praktische Zwecke nicht in Frage.

3. Das allgemeine Näherungsverfahren. a) Der Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung. Wir verwenden deshalb ein Näherungsverfahren, welches statt mit den Differentialgleichungen mit dem Impulssatz arbeitet, welcher durch eine Integration aus diesen Differentialgleichungen erhalten wird. Durch Integration der Gleichungen (1), (2) über y zwischen den Grenzen $y=0$ und $y=\infty$ erhält man in bekannter Weise[3]:

$$U^2\frac{d\vartheta}{dx}+(2\vartheta+\delta^*)\,U\frac{dU}{dx}-U\,v_0=\frac{\tau_0}{\varrho}\,. \tag{5}$$

[1] *H. Schlichting*, Luftfahrtforschung 19 (1942), S. 179.
[2] *H. Blasius*, Z. Math. Phys. 56 (1908), S. 1.
[3] *L. Prandtl*, The mechanics of viscous fluids. Durand, Aerodynamic Theory, Bd. III. Berlin 1935.

Dabei bedeutet ϑ die Impulsverlustdicke, δ^* die Verdrängungsdicke und $\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ die Wandschubspannung[1]. Das hier einzuschlagende Näherungsverfahren für die Berechnung der Grenzschicht arbeitet in der Weise, daß für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht $u(x, y)$, welche in Gleichung (5) in ϑ, δ^* und τ_0 enthalten ist, ein plausibler Ansatz gemacht wird. Damit ergibt sich dann aus (5) eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\vartheta(x)$, und nachdem diese gelöst ist, erhält man auch die übrigen Kenngrößen der Grenzschicht $\delta^*(x)$, $\tau_0(x)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ in der Grenzschicht. Die Brauchbarkeit dieses Näherungsverfahrens ist weitgehend davon abhängig, ob es gelingt, für $u(x, y)$ einen Ansatz durch geeignete Funktionen zu finden.

Von *Pohlhausen*[2] wurde dieses Verfahren zuerst für die Grenzschicht mit undurchlässiger Wand durchgeführt. Dabei werden die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht durch eine einparametrige Schar angenähert und die Näherungsfunktion für die Geschwindigkeitsverteilung wird als Polynom vierten Grades angesetzt. Die Koeffizienten dieses Polynoms werden bestimmt, indem man für die Geschwindigkeitsprofile einige Randbedingungen erfüllt, welche sich aus den Grenzschichtdifferentialgleichungen ergeben. Dieses Verfahren hat sich für die Grenzschicht ohne Absaugung gut bewährt.

Für die Grenzschicht mit Absaugung verfahren wir deshalb in gleicher Weise. Für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht wählen wir den einparametrigen Ansatz

$$\frac{u}{U} = F_1(\eta) + K F_2(\eta); \qquad \eta = \frac{y}{\delta_1(x)} . \tag{6}$$

Dabei sind $F_1(\eta)$ und $F_2(\eta)$ fest vorgegebene Funktionen, die sogleich explizit aufgeschrieben werden; $K = K(x)$ ist ein Formparameter der Grenzschichtprofile, dessen Verteilung längs der Lauflänge abhängig ist von der Körperform und dem Absaugegesetz; $\delta_1(x)$ ist ein Maß für die örtliche Grenzschichtdicke. Der Zusammenhang von δ_1 mit δ^* und ϑ wird später angegeben. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, für die Funktionen $F_1(\eta)$ und $F_2(\eta)$ andere Ansätze zu wählen als bei *Pohlhausen* für die undurchlässige Wand. Für das Geschwindigkeitsprofil schreiben wir die folgenden fünf Randbedingungen vor, welche sämtlich aus den Differentialgleichungen der Grenzschicht mit Absaugung (1), (2) folgen:

$$y = 0 : u = 0, \qquad r_0 \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} , \tag{7a, b}$$

$$y = \infty : u = U, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7c, d, e}$$

Die Auswahl von $F_1(\eta)$ und $F_2(\eta)$ soll nach dem Gesichtspunkt geschehen, daß einige typische Sonderfälle von Geschwindigkeitsprofilen der Grenzschicht mit Absaugung durch (6) möglichst gut dargestellt werden. Insbesondere wollen wir verlangen, daß das „asymptotische Absaugeprofil" (3) im Ansatz (6) enthalten ist. Dieses ist erfüllt, wenn wir setzen

$$F_1(\eta) = 1 - e^{-\eta} \tag{8}$$

und dem asymptotischen Absaugeprofil die Werte $K = 0$ und $\delta_1 = \delta^*$ zuordnen. Ferner soll der Ansatz (6) naturgemäß auch noch im Grenzfall verschwindender Absaugung brauchbare Ergebnisse liefern. Zu diesem Zweck fordern wir, daß ein typisches Grenzschichtprofil ohne Absaugung gut dargestellt wird. Als dieses wählen wir die Plattenströmung bei undurchlässiger Wand nach *Blasius*[3]. Da für die exakte Lösung dieses Falles keine bequeme analytische Formel vorhanden ist, braucht man eine Näherungsformel für das *Blasius*sche Plattenprofil. Es zeigt sich, daß die Funktion $u/U_0 = \sin(a\,\eta)$ das *Blasius*profil sehr gut annähert (a = Konstante)[4]. Wir setzen demnach

$$\left.\begin{aligned} 0 < \eta \leqq 3 : F_2(\eta) &= F_1 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\,\eta\right), \\ \eta \geqq 3 : F_2(\eta) &= F_1 - 1 = -e^{-\eta} . \end{aligned}\right| \tag{9}$$

---

[1] Es ist $U^2\,\vartheta = \int_{y=0}^{\infty} u\,(U-u)\,dy$; $\qquad \delta^*\,U = \int_{y=0}^{\infty} (U-u)\,dy$.

[2] K. *Pohlhausen*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 252.

[3] *H. Blasius*, Z. Math. Phys. 56 (1908), S. 1.

[4] Daß die Sinusfunktion eine gute Näherung für die Geschwindigkeitsverteilung an der ebenen Platte ohne Absaugung ist, ergab sich aus einer Untersuchung von Herrn *Iglisch*.

und erhalten dann mit $K=-1$ eine gute Annäherung für die Plattenströmung ohne Absaugung. Der zugehörige Wert von δ_1 wird später angegeben. Die Funktionen $F_1(\eta)$ und $F_2(\eta)$ sind in Abb. 2 angegeben. Somit haben wir für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq \eta \leqq 3: \frac{u}{U} &= 1-e^{-\eta}+K\left[1-e^{-\eta}-\sin\left(\frac{\pi}{6}\eta\right)\right], \\ \eta \geqq 3: \frac{u}{U} &= 1-(K+1)e^{-\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Durch die Wahl der Funktionen F_1 und F_2 sind die Randbedingungen (7a, c, d, e) von selbst erfüllt. Die letzte Randbedingung (7b) ergibt wegen

$$\frac{\tau_0}{\varrho} = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{\nu U}{\delta_1}\left[1+K\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\right] \tag{11}$$

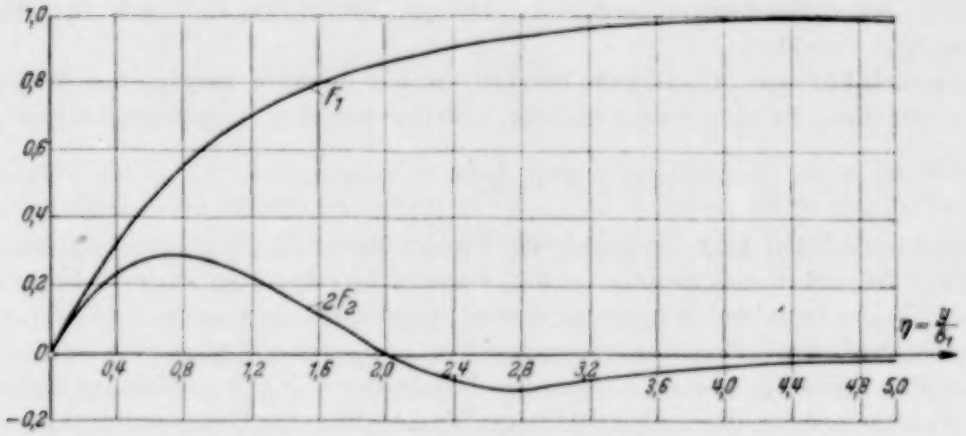


Abb. 2. Die Funktionen F_1 und F_2 für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht, vgl. (9).

die folgende Bestimmungsgleichung für K:

$$\frac{\nu_0 U}{\delta_1}\left[1+K\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\right] = U\,U' - \nu\frac{U}{\delta_1^2}(1+K)$$

und hieraus mit

$$\hat{\lambda} = \frac{\delta_1^2 U'}{\nu} \text{ und } \hat{\lambda}_1 = \frac{-\nu_0 \delta_1}{\nu} \tag{12, 13}$$

für K den Wert

$$K = \frac{\hat{\lambda}+\hat{\lambda}_1-1}{1-\hat{\lambda}_1\left(1-\frac{\pi}{6}\right)}. \tag{14}$$

Die Größen $\hat{\lambda}$ und $\hat{\lambda}_1$ sind zwei dimensionslose Grenzschichtparameter. Eine zu $\hat{\lambda}$ analoge Größe wurde auch schon bei *Pohlhausen* für die Grenzschicht ohne Absaugung benutzt; $\hat{\lambda}_1$ kommt durch die Absaugung neu hinzu. Für das asymptotische Absaugeprofil mit $\delta_1=\delta^*$ ist nach (4) und (13) $\hat{\lambda}_1=1$. Der Formparameter K in Abhängigkeit von $\hat{\lambda}$ und $\hat{\lambda}_1$ ist in Abb. 3 dargestellt.

b) Die Differentialgleichung für die Impulsdicke. Um mit den Ansätzen (6), (8) und (9) aus (5) die Differentialgleichung für die Impulsdicke zu erhalten, sind zunächst die Beziehungen zwischen ϑ, δ^* und δ_1 aufzustellen. Für die Verdrängungsdicke ergibt sich

$$\frac{\delta^*}{\delta_1} = \int_{\eta=0}^{\infty}(1-F_1)\,d\eta - K\int_0^{\infty}F_2\,d\eta. \tag{15}$$

Die Ausrechnung der Integrale ergibt

$$\frac{\delta^*}{\delta_1} = g^*(K) = 1-K\left(2-\frac{6}{\pi}\right). \tag{16}$$

Für die Impulsdicke erhält man:

$$\frac{\vartheta}{\delta_1} = \int_0^{\infty}(F_1+K\,F_2)\,(1-F_1-K\,F_2)\,\mathrm{d}\eta$$

oder

$$\frac{\vartheta}{\delta_1} = g(K) = C_0 + C_1 K + C_2 K^2 \tag{17}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \int_0^\infty F_1(1-F_1)\,d\eta = \frac{1}{2}\,, \\ C_1 &= \int_0^\infty (F_2 - 2F_1 F_2)\,d\eta = -1 + \frac{6}{\pi} - \frac{\pi}{3}\,\frac{1+\frac{\pi}{6e^3}}{1+\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} = 0{,}06656\,, \\ C_2 &= -\int_0^\infty F_2^2\,d\eta = -3 + \frac{12}{\pi} - \frac{\pi}{3}\,\frac{1+\frac{\pi}{6e^3}}{1+\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} = -0{,}02358\,, \end{aligned}\right\} \tag{18a, b, c}$$

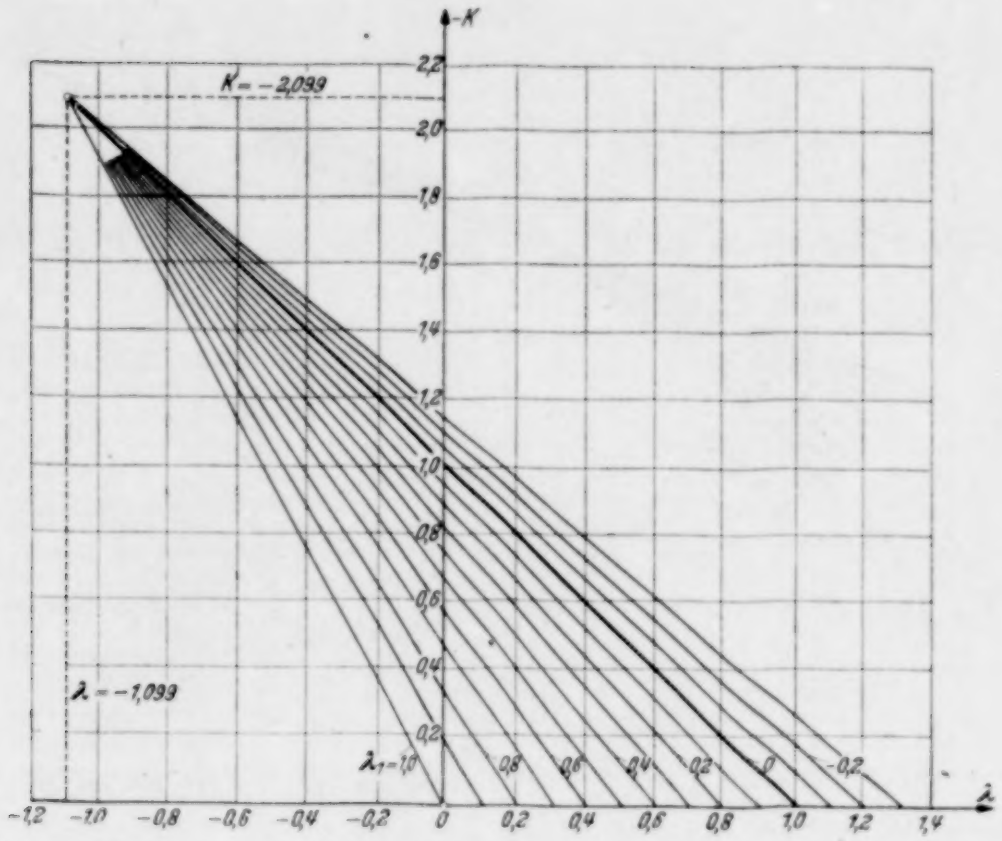


Abb. 3. Der Formparameter K des Geschwindigkeitsprofiles in Abhängigkeit von λ, λ_1, nach (14).

also

$$\frac{\vartheta}{\delta_1} = g(K) = \frac{1}{2} + 0{,}06656\,K - 0{,}02358\,K^2\,. \tag{17a}$$

Für den später gebrauchten Formparameter der Grenzschichtprofile δ^*/ϑ erhält man somit

$$\frac{\delta^*}{\vartheta} = \frac{1 - K\left(2 - \frac{6}{\pi}\right)}{\frac{1}{2} + C_1 K + C_2 K^2} = \frac{1 - 0{,}09014\,K}{\frac{1}{2} + 0{,}06656\,K - 0{,}02358\,K^2}\,. \tag{19}$$

Ferner merken wir noch an nach (11) und (17)

$$\frac{\tau_0}{\mu}\,\frac{\vartheta}{U} = g\left[1 + K\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)\right] = f(K)\,. \tag{20}$$

Um nun aus (5) eine Differentialgleichung für $\vartheta(x)$ herzuleiten, schreiben wir (5) in der Form

$$\frac{U\vartheta}{\nu}\,\frac{d\vartheta}{dx} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\vartheta}\right)\frac{U'\vartheta^2}{\nu} + \frac{-v_0\vartheta}{\nu} = \frac{\tau_0}{\mu}\,\frac{\vartheta}{U}\,. \tag{21}$$

Ferner führen wir nach *Holstein* und *Bohlen*[1] ein

$$\frac{U'\vartheta^2}{\nu} = \varkappa = \lambda\, g^2 \tag{22}$$

und

$$\frac{-v_0\vartheta}{\nu} = \varkappa_1 = \lambda_1\, g\,. \tag{23}$$

Mit

$$Z = \frac{\vartheta^2}{\nu} \tag{24}$$

gilt dann

$$\varkappa = Z\,U'\,,\quad \varkappa_1 = -\,v_0\sqrt{\frac{Z}{\nu}}\,. \tag{25}$$

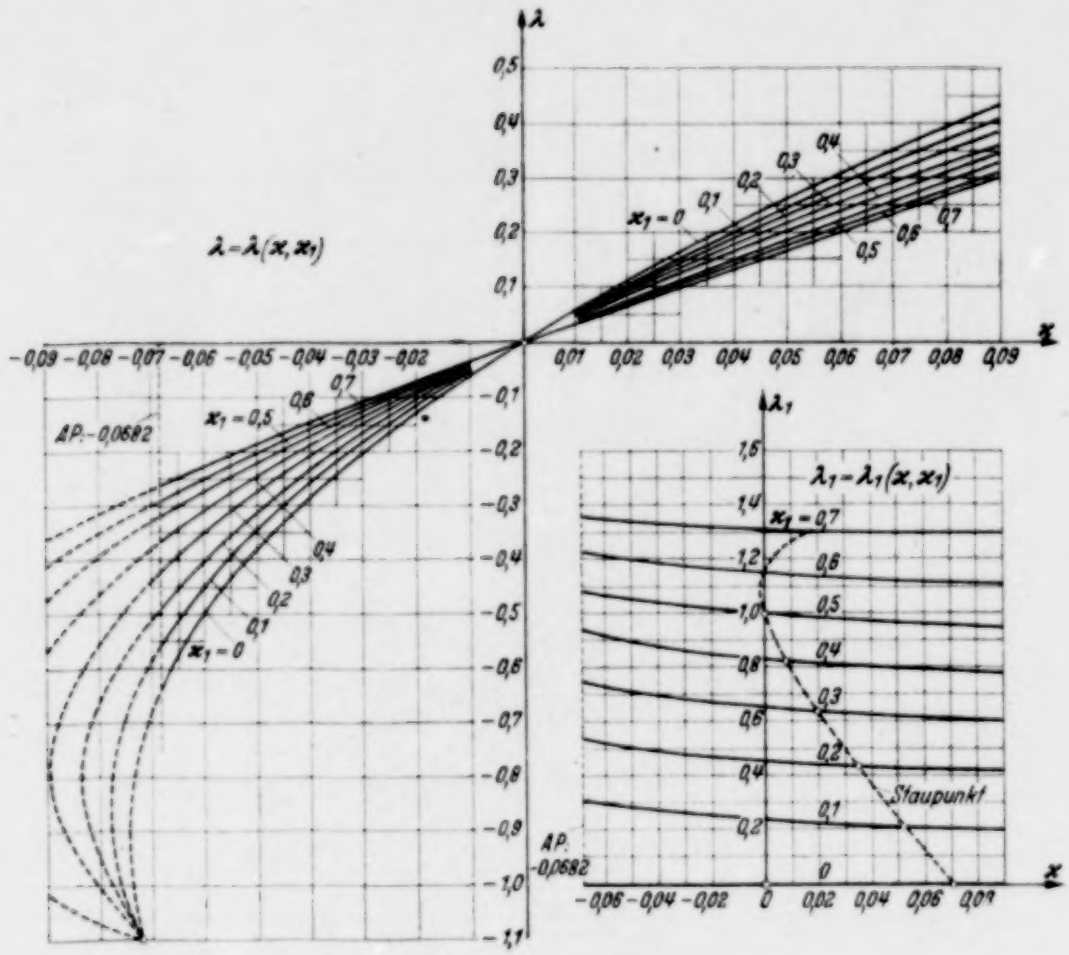


Abb. 4. Die Parameter λ und λ_1 in Abhängigkeit von $\varkappa$ und $\varkappa_1$, nach (31).

Mit (22) bis (25) sowie (20) geht die Differentialgleichung (21) über in

$$\frac{1}{2}\,U\,\frac{dZ}{dx} + \left[2 + \frac{1 - K\left(2 - \frac{6}{x}\right)}{g(K)}\right]\varkappa + \varkappa_1 = f(K)\,. \tag{26}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$G(\varkappa, \varkappa_1) = 2f - 2\varkappa\left[2 + \frac{1 - K\left(2 - \frac{6}{x}\right)}{g(K)}\right] - 2\,\varkappa_1\,, \tag{27}$$

so wird die Differentialgleichung für $Z(x)$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{G(\varkappa, \varkappa_1)}{U} \quad \text{mit} \quad \varkappa = Z\,U' \quad \text{und} \quad \varkappa_1 = -\,v_0\sqrt{\frac{Z}{\nu}} \tag{28}$$

Wenn die Funktion $G(\varkappa, \varkappa_1)$ bekannt ist, so kann aus dieser Gleichung die Integralkurve $Z(x)$ nach dem Isoklinenverfahren berechnet werden.

[1] *H. Holstein* und *T. Bohlen*, Ein vereinfachtes Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Ansatz von *K. Pohlhausen* genügen. Lilienthal-Gesellschaft, Bericht S. 10 (1942), S. 5.

Für die praktische Durchführung der Rechnung ist es noch zweckmäßig, dimensionslose Größen einzuführen. Wir bilden diese mit der Anströmgeschwindigkeit U_0 und einer Bezugslänge l (z. B. Flügeltiefe). Demnach setzen wir

$$Z^* = \frac{Z U_0}{l}\,,\quad x^* = \frac{x}{l}\,,\quad \frac{-v_0(x^*)}{U_0}\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}} = f_1(x^*)\,. \tag{29}$$

Dann wird aus (28)

$$\frac{dZ^*}{dx^*} = \frac{G(\varkappa,\varkappa_1)}{U/U_0} \quad \text{mit} \quad \varkappa = Z^*\frac{l}{U_0}\frac{dU}{dx} \quad \text{und} \quad \varkappa_1 = f_1(x^*)\sqrt{Z^*}\,. \tag{30}$$

Für die Berechnung der Funktion $G(\varkappa,\varkappa_1)$ gilt folgendes: Zunächst erhält man $\varkappa$ und $\varkappa_1$ in Abhängigkeit von λ und λ_1 aus (22) und (23), wenn man den Zusammenhang zwischen K und λ, λ_1 nach (14) beachtet:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa &= g^2(K)\,\lambda = g^2(\lambda,\lambda_1)\,\lambda\,,\\ \varkappa_1 &= g\,(K)\,\lambda_1 = g\,(\lambda,\lambda_1)\,\lambda_1\,.\end{aligned}\right| \tag{31}$$

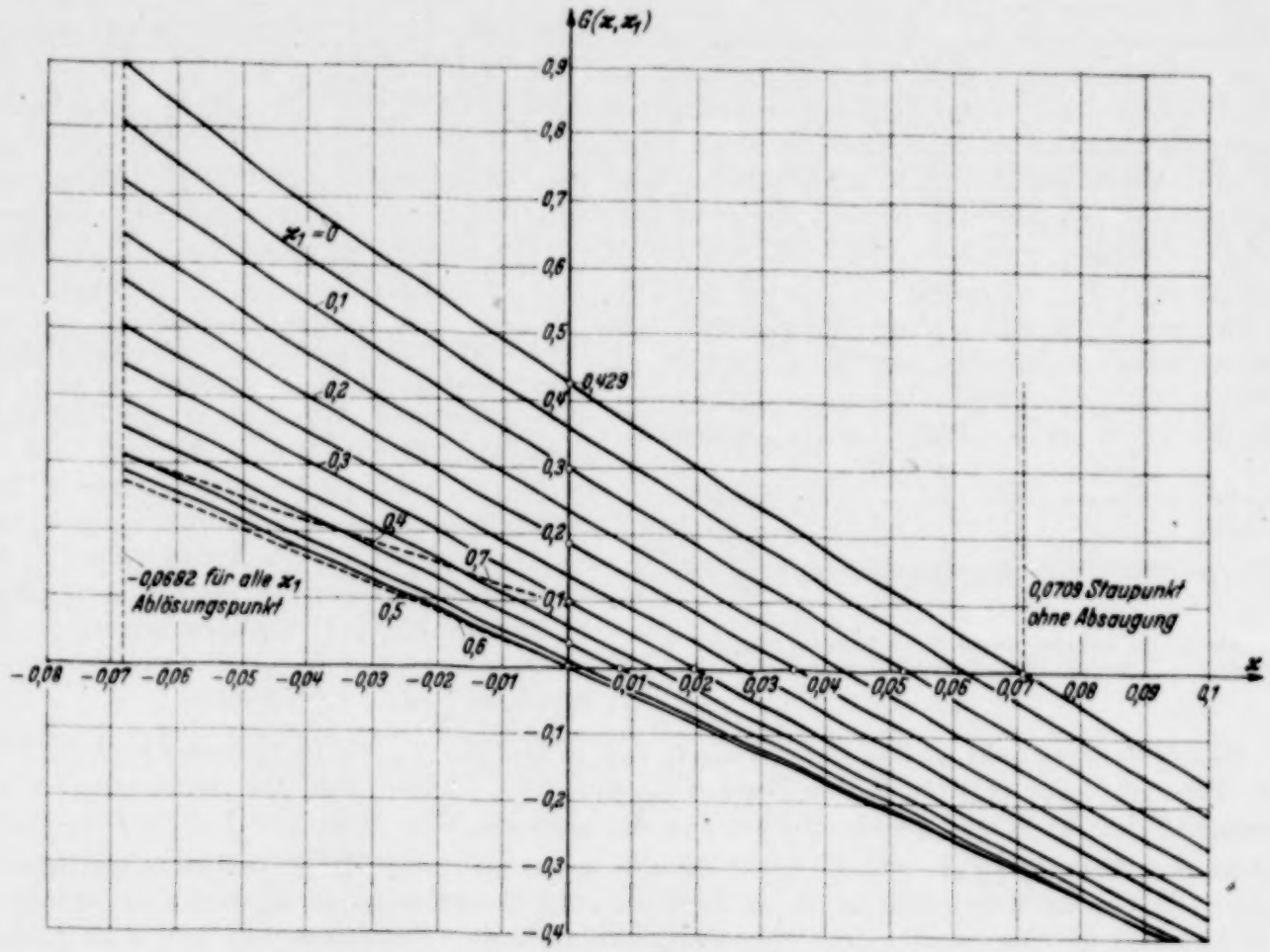


Abb. 5. Diagramm zur Lösung der Differentialgleichung für die Impulsdicke: $G(\varkappa,\varkappa_1)$ nach (30).

Aus (27) und (31) folgt

$$\frac{1}{2}\,G = g\left\{1 + K\left(1-\frac{\pi}{6}\right) - 2\lambda\, g - \lambda\left[1 - K\left(2-\frac{6}{\pi}\right)\right] - \lambda_1\right\} = g\,F(\lambda,\lambda_1) \tag{32}$$

mit

$$F(\lambda,\lambda_1) = 1 + K\left(1-\frac{\pi}{6}\right) - 2\lambda\, g - \lambda\left[1 - K\left(2-\frac{6}{\pi}\right)\right] - \lambda_1\,. \tag{33}$$

Hiernach kann G zunächst als Funktion von λ, λ_1 und wegen (31) sodann auch in Abhängigkeit von $\varkappa$, $\varkappa_1$ berechnet werden.

Die Funktionen $\varkappa(\lambda,\lambda_1)$ und $\varkappa_1(\lambda,\lambda_1)$ sind in Abb. 4 dargestellt. Die hieraus ermittelte Funktion $G(\varkappa,\varkappa_1)$ ist in Abb. 5 und Tabelle 1 angegeben.

c) Staupunkt und Ablösungspunkt. Besondere Betrachtungen erfordert das Verhalten der Differentialgleichung (28) im Staupunkt, wo $U=0$ ist. Damit in diesem Punkt die

Anfangsneigung der Integralkurve $(dZ/dx)_0$ einen endlichen Wert hat, muß $G(\varkappa,\varkappa_1)=0$ sein. Dies gibt die zusammengehörigen Anfangswerte $\varkappa_0$, $\varkappa_{10}$. Da die Funktion $g(K)$ für die in Frage kommenden Werte von K keine Nullstelle hat, kommt die Bestimmung von $\varkappa_0$, $\varkappa_{10}$ nach (32) hinaus auf die Nullstellen von $F(\lambda,\lambda_1)=0$. Die sich hieraus ergebenden Anfangswerte im Staupunkt λ_0, λ_{10} sind in Tabelle 2 angegeben, desgleichen die dazu nach (31) berechneten Anfangswerte $\varkappa_0$, $\varkappa_{10}$. Zu jedem Wertepaar $\varkappa_0$, $\varkappa_{10}$ gehört ein Mengenbeiwert der Absaugung, der sich aus $\vartheta_0^2 U'_0/\nu=\varkappa_0$ und $-v_0(0)\,\vartheta_0/\nu=\varkappa_{10}$ ergibt zu

$$\frac{-v_0(0)}{\sqrt{U'_0\nu}}\,\frac{\varkappa_{10}}{\sqrt{\varkappa_0}}=C_0\,. \tag{34}$$

In Abb. 6 sind die Anfangswerte $\varkappa_0$ und $\varkappa_{10}$ über dem örtlichen Mengenbeiwert im Staupunkt aufgetragen. Zu $\varkappa_0$ erhält man den Anfangswert Z_0 durch

$$Z_0=\frac{\varkappa_0}{U'_0}\,. \tag{35}$$

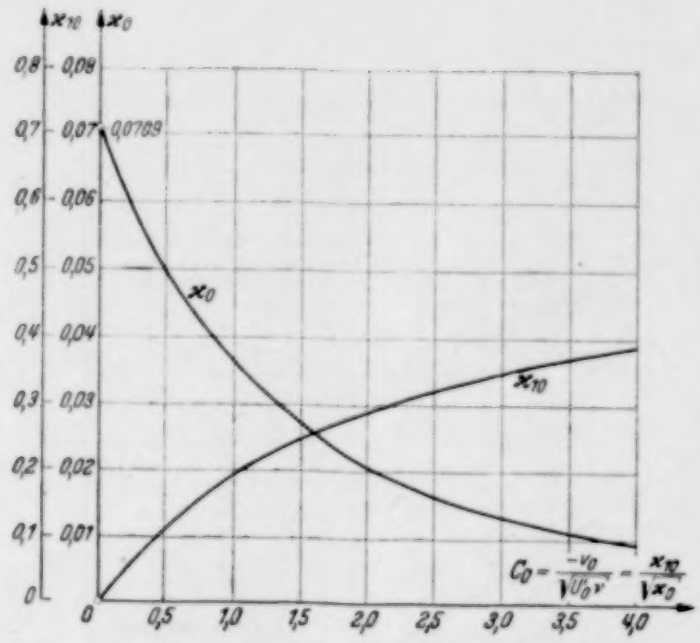


Abb. 6. Die Anfangswerte der Grenzschicht im Staupunkt bei verschiedenen Absaugemengen.

Zwischen der Verteilungsfunktion der Absaugung $f_1(x)$ nach (29) und C_0 besteht folgender Zusammenhang: Es ist $U'_0=K_1U_0/l$, wo K_1 eine Profilkonstante ist. Somit ist $\sqrt{U'_0\nu}=U_0\sqrt{K_1\nu/U_0 l}$ und nach (34)

$$C_0=\frac{-v_0(0)}{U_0}\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}\,\frac{1}{\sqrt{K_1}}=\frac{f_1(0)}{\sqrt{K_1}}\,. \tag{36}$$

Die Ermittlung der Anfangswerte der Integralkurve geht also folgendermaßen vor sich: Zu dem gegebenen Anfangswert der Absaugegeschwindigkeit im Staupunkt $f_1(0)$ wird zunächst C_0 nach (36) ermittelt. Aus Abb. 6 erhält man hierzu die Anfangswerte $\varkappa_0$ und $\varkappa_{10}$, und nach (35) den Anfangswert Z_0 der Integralkurve. Falls die Absaugung nicht im Staupunkt beginnt, sondern weiter stromabwärts, so ist $C_0=0$, $\varkappa_{10}=0$ und nach Abb. 6 $\varkappa_0=0{,}0709$, $Z_0=0{,}0709/U'_0$.

Der Ablösungspunkt ist dadurch definiert, daß in ihm die Wandschubspannung gleich Null ist. Dies gibt nach (11) für K den Wert $K=-6(6-\pi)=-2{,}099$. Für das asymptotische Absaugeprofil ist $K=0$, und gleichzeitig ist dies der größtmögliche Wert von K. Zu $K=-2{,}099$ gehört der Wert $\lambda=[\pi/(6-\pi)]=-1{,}099$ für alle λ_1 und $\varkappa=-0{,}0721$ für alle $\varkappa_1$. Wollte man jedoch die Grenzschichtrechnung bis zu diesem Punkt durchführen, so ergäben sich im letzten Teil kurz vor diesem Punkt gewisse Schwierigkeiten, da dort die Zuordnung von $\varkappa$ zu λ nicht eindeutig ist (vgl. Abb. 4). Auch ist die Funktion $G(\varkappa,\varkappa_1)$ über $\varkappa$ kurz vor diesem Punkt nicht eindeutig. Es ist deshalb zweckmäßig, als Ablösungspunkt, wo die Grenzschichtrechnung aufzuhören hat, einen etwas weiter stromaufwärts gelegenen Punkt zu wählen. Ein solcher Punkt ergibt sich, wenn man den $\varkappa$-Wert eines exakten Ablösungsprofiles nach *Hartree*[1] wählt. Für dieses ist

$$\text{Ablösung: } \varkappa_A=\left(\frac{\vartheta^2}{\nu}\,\frac{dU}{dx}\right)_A=-0{,}0682\,. \tag{37}$$

Wir definieren diesen Punkt als Ablösungspunkt unserer Grenzschichtrechnung für alle Mengenbeiwerte der Absaugung. Die nebenstehende Tabelle gibt eine Übersicht über die Werte von ϑ und δ^* im Ablösungspunkt für vier verschiedene Rechenverfahren. Dabei sind zum Vergleich auch noch die Werte für ein anderes exaktes Absaugeprofil nach *Howarth*[2]) angegeben.

---

[1] *D. R. Hartree*, Cambridge Phil. Soc., Vol. 33 (1937), S. 223.

[2] *L. Howarth*, Proc. Soc. London A Nr. 919, Vol. 164 (1938) S. 547.

Fall	$\frac{\vartheta^2}{\nu} U' = \varkappa_A$	$\frac{\delta^{**2}}{\nu} U' = \lambda_A^*$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$
Neues Verfahren	(−0,0721)	(−1,55)	(4,64)
Pohlhausen	−0,1567	−1,92	3,50
exakt, *Hartree*	−0,0682	−1,22	4,03
exakt, *Howarth*	−0,0841	−1,25	3,84

Die hiermit etwas willkürlich vorgenommene Wahl des Ablösungspunktes kann jedoch unbedenklich hingenommen werden, da die Näherungsverfahren für die Grenzschichtrechnung im Gebiet des Druckanstieges bekanntlich immer etwas unsicher sind, und hier nur eine überschlägliche Ermittlung der Grenzschichtparameter, aber keine genaue Berechnung möglich ist. Aus dem gleichen Grunde kann auch hingenommen werden, daß im vorliegenden Fall kurz vor dem Ablösungspunkt die Geschwindigkeitsverteilung u/U teilweise Werte annimmt, die um ein Geringes größer als 1 sind.

d) Durchführung der Rechnung für den allgemeinen Fall. Mit dem vorstehend angegebenen Formelsystem kann die Berechnung der Grenzschicht für eine beliebig vorgegebene Körperform und eine beliebige Verteilung der Absaugegeschwindigkeit folgendermaßen ausgeführt werden: Zur Verteilung der Absaugegeschwindigkeit $-v_0(x)$ gehört die reduzierte Absaugeverteilungsfunktion $f_1(x^*)$ nach (29). Beginnt die Absaugung im Staupunkt, so bestimmt man die Anfangswerte C_0, $\varkappa_0$, $\varkappa_{10}$ und Z_0 wie in Ziff. 3c) angegeben. Mit diesen Anfangswerten kann jetzt die Differentialgleichung (30) graphisch integriert werden mit Hilfe des Diagrammes in Abb. 5. Die Rechnung wird durchgeführt bis zur Stelle, wo $\varkappa$ den Wert $\varkappa_A = -0{,}0682$ erreicht. Diese Integration liefert unmittelbar Z^*, $\varkappa$, $\varkappa_1$ als Funktion von x^*. Dabei ist $\sqrt{Z^*} = \vartheta/l \sqrt{U_0 l/\nu}$. Die übrigen Grenzschichtparameter ergeben sich dann folgendermaßen: Mit Hilfe von Abb. 4 erhält man zu $\varkappa$ und $\varkappa_1$ die Parameter λ und λ_1, und zu diesen aus Abb. 3 den Parameter K. Zu K erhält man nach (19) den Formparameter δ^*/ϑ und somit auch $\delta^*/l \sqrt{U_0 l/\nu} = \delta^*/\vartheta \sqrt{Z^*}$. Aus (20) erhält man dann auch die Wandschubspannung τ_0 zu

$$\frac{\tau_0}{\mu U} \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}} = \frac{f(K)}{\sqrt{Z^*}} . \tag{38}$$

Für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht braucht man noch den Parameter δ_1. Nach (6) und (7) gilt

$$\eta = \frac{y}{\delta_1} = \frac{y}{\vartheta} g(K) = \frac{y}{l} \sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}} \frac{g(K)}{\sqrt{Z^*}} . \tag{39}$$

Schließlich erhält man noch den Mengenbeiwert der Absaugung aus

$$Q = b \int_{x=0}^{l} v_0(x)\, dx = -c_Q U_0 b\, l$$

und den reduzierten Mengenbeiwert

$$c_Q^* = c_Q \sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}} . \tag{40}$$

Dabei ist

$$c_Q^* = \int_{x^*=0}^{x_H^*} f_1(x^*)\, dx^* , \tag{41}$$

wo x_H^* die Hinterkante bedeutet. Beispiele solcher Grenzschichtrechnungen werden in Ziff. 4 angegeben.

4. Beispiele. In diesem Abschnitt soll mit unserem Formelsystem eine Reihe von Beispielen behandelt werden. Zunächst sollen einige bekannte Fälle ohne Absaugung nachgerechnet werden, um an diesen zu zeigen, daß unsere Methode befriedigende Ergebnisse liefert.

a) Die längsangeströmte ebene Platte und die Staupunktströmung ohne Absaugung. Für sämtliche Fälle ohne Absaugung ist $v_0(x) = 0$, und somit $\lambda_1 = 0$, $\varkappa_1 = 0$. Nach (14) ist dann $K = \lambda - 1$, und nach (17)

$$\frac{\vartheta}{\delta_1} = g(\lambda) = \frac{1}{2} + 0{,}06656\,(\lambda - 1) - 0{,}02358\,(\lambda - 1)^2 . \tag{42}$$

Die Differentialgleichung (28) für die Impulsdicke wird

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{G(\varkappa)}{U}, \qquad \varkappa = Z\,U'. \tag{43}$$

Dabei ist nach (32) und (33)

$$G = 2g(\lambda)\,F(\lambda) \tag{44}$$

$$\text{mit } F(\lambda) = -2C_2\lambda^3 + \left(2C_2 - 2 + \frac{6}{\pi}\right)\lambda^2 + \left(1 - \frac{6}{\pi} - \frac{\pi}{6}\right)\lambda + \frac{\pi}{6}. \tag{45}$$

Ferner ist nach (31)

$$\varkappa = g^2\lambda = \lambda\left[\frac{1}{2} + C_1(\lambda-1) + C_2(\lambda-1)^2\right]^2. \tag{46}$$

Die nach (42), (44), (45) und (46) berechneten Werte von $\varkappa$ und G sind in Tabelle 1 (für $\varkappa_1 = 0$) angegeben.

a) Die längsangeströmte ebene Platte. Die Grenzschicht an der längsangeströmten Platte ohne Absaugung (*Blasius*[1]) erhält man mit $U = U_0$ für $\lambda = \varkappa = 0$. Dann wird nach (42) bis (45)

$$\left.\begin{aligned} K &= -1\,,\ g(0,0) = \frac{6}{\pi} - \frac{3}{2} \\ F(0,0) &= \frac{\pi}{6}\,. \\ G(0,0) &= 2 - \frac{\pi}{2} = 0{,}4292\,. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Mit dem Anfangswert $Z_0 = 0$ bei $x = 0$ ergibt die Integration von (43)

$$\vartheta = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = 0{,}655\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \tag{48}$$

Weiter ergibt sich aus (19) $\delta^*/\vartheta = 2\,\frac{\pi-2}{4-\pi} = 2{,}66$, und somit die Verdrängungsdicke

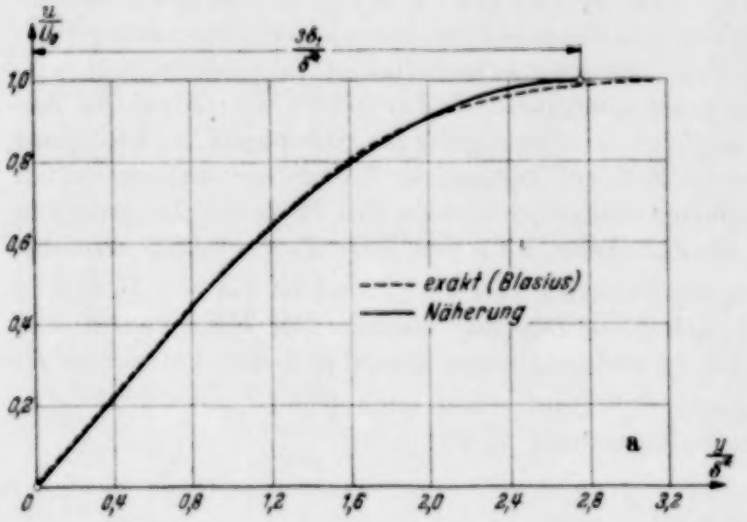
$$\delta^* = (\pi-2)\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = 1{,}742\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \tag{49}$$

Der Beiwert des gesamten Reibungswiderstandes der Platte der Breite b und der Länge l bei einseitiger Benetzung $c_f = W_R/\frac{\varrho}{2}U_0^2\,b\,l$ wird wegen $c_f = 2\,\vartheta_l/l$

$$c_f = \sqrt{8-2\pi}\sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}} = 1.310\sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}}. \tag{50}$$

Schließlich ist die Geschwindigkeitsverteilung nach (10)

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq \eta \leqq 3 &: u = U_0 \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\eta\right), \\ \eta \geqq 3 &: u = U_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$



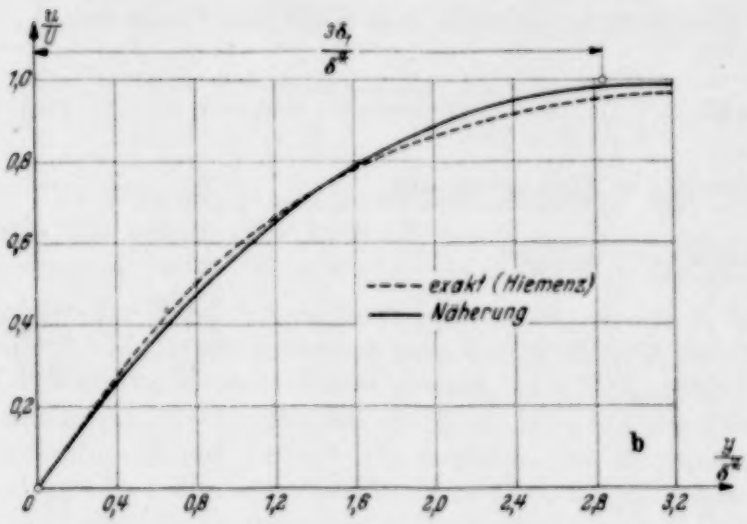


Abb. 7. Vergleich der Geschwindigkeitsverteilungen nach der Näherungsrechnung mit der exakten Rechnung. a) Längsangeströmte ebene Platte, exakte Rechnung nach *Blasius*, Näherungsrechnung nach (51). b) Exakte Rechnung nach *Hiemenz*, Näherungsrechnung nach (55).

Dabei ist $\eta = y/\delta_1$ und $\delta_1 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = 1{,}598\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$. In Abb. 7a ist die Geschwindigkeitsverteilung mit der exakten Lösung von *Blasius* verglichen; die Übereinstimmung ist sehr gut. Ferner sind in nebenstehender Tabelle die Kenngrößen der Grenzschicht nach der vorliegenden Näherungsrechnung verglichen mit den Werten der exakten Lösung von *Blasius* und der bekannten Näherung von K. *Pohlhausen*. Die Übereinstimmung unseres neuen Näherungsverfahrens

[1] Siehe Fußnote 2, Seite 202.

mit der exakten Rechnung ist für alle Grenzschichtparameter sehr gut, in den meisten Fällen etwas besser als für die *Pohlhausen*-Näherung.

Beiwerte der Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte ohne Absaugung.

Rechenverfahren	$\delta^* \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$	$\vartheta \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$c_f \left(\frac{U_0 l}{\nu}\right)^{1/2}$	$\frac{\tau_0}{\mu} \frac{\vartheta}{U_0}$
Neues Verfahren	1,742	0,655	2,66	1,310	0,215
Pohlhausen	1,750	0,685	2,55	1,370	0,234
exakt, *Blasius*	1,721	0,664	2,59	1,328	0,220

β) Die ebene Staupunktströmung. Für diesen Fall ist die Geschwindigkeit der Potentialströmung $U(x) = u_1 x$. Sämtliche Grenzschichtgrößen sind jetzt unabhängig von der Lauflänge x. Der Anfangswert von Z wird aus (43) erhalten für $G(\varkappa_0) = 0$. Dies erfordert $F(\lambda_0) = 0$. Aus (45) findet man als Nullstelle von $F(\lambda)$ den Wert $\lambda_0 = 0{,}3547$. Die zugehörigen Werte von K und $\varkappa$ sind nach (46) $K_0 = -0{,}6453$ und $\varkappa_0 = 0{,}709$. Ferner ist nach (42) $g(\lambda_0) = 0{,}447$. Damit wird für die ebene Staupunktströmung die Impulsdicke

$$\vartheta = \sqrt{\varkappa_0} \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} = 0{,}266 \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} . \tag{52}$$

Aus (19) ergibt sich $\delta^*/\vartheta = 2{,}37$ und damit

$$\delta^* = 2{,}37 \sqrt{\varkappa_0} \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} = 0{,}630 \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} . \tag{53}$$

Ferner ist nach (42) $\delta_1 = 0.595 \sqrt{\nu/u_1}$. Damit ergibt sich für die Wandschubspannung aus (11)

$$\frac{\tau_0}{\mu U} \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} = 1{,}163 . \tag{54}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich aus (10) zu

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq \eta \leqq 3 : \frac{u}{U} &= 0{,}3547\,(1 - e^{-\eta}) + 0{,}6453 \sin\left(\frac{\pi}{6}\eta\right), \\ \eta \geqq 3 : \frac{u}{U} &= 1 - 0{,}3547\, e^{-\eta} . \end{aligned}\right| \tag{55}$$

Dabei ist $\eta = y/\delta_1 = 1{,}68\, y \sqrt{u_1/\nu}$. In Abb. 7b ist die Geschwindigkeitsverteilung nach (55) mit der exakten Lösung von *Hiemenz*[1] verglichen; auch hier ist die Übereinstimmung befriedigend. Ferner sind in nebenstehender Tabelle die Kenngrößen der Grenzschicht nach der vorliegenden Rechnung verglichen mit der exakten Lösung von *Hiemenz* und mit der Näherungsrechnung von *Pohlhausen*. Die Übereinstimmung des neuen Verfahrens mit der exakten Lösung ist in diesem Fall etwas schlechter als bei der ebenen Platte, und auch nicht ganz so gut wie der Näherung von *Pohlhausen*. Doch liefert das neue Verfahren auch in diesem Fall sehr brauchbare Werte.

Beiwerte der Grenzschicht der ebenen Staupunktströmung ohne Absaugung.

Rechenverfahren	$\vartheta \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}$	$\delta^* \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$\frac{\tau_0}{\mu U} \sqrt{\frac{\nu}{u_1}}$	$\frac{\tau_0 \vartheta}{\mu U}$
Neues Verfahren	0,266	0,630	2,37	1,163	0,310
Pohlhausen	0,278	0,641	2,31	1,19	0,331
exakt, *Hiemenz*	0,292	0,648	2,21	1,234	0,360

b) Die längsangeströmte ebene Platte mit homogener Absaugung. Als erstes Beispiel einer Grenzschicht mit Absaugung möge der Fall der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung behandelt werden. Dabei soll die Absaugung an der Plattenvorderkante beginnen. Dieser Fall wurde von uns mit einer anderen Näherungsmethode schon früher[2] behandelt; doch sind die nachstehenden Ergebnisse wesentlich genauer als jene früheren.

[1] *K. Hiemenz*, Dingl. Polytechn. Journ. 326 (1911), S. 321.

[2] Siehe Fußnote 6, Seite 201.

In diesem Fall ist in großem Abstand von der Plattenvorderkante die Grenzschicht unabhängig von x und somit sind alle Grenzschichtparameter konstant. Die zugehörige asymptotische Lösung wurde bereits in (3), (4), (4a) angegeben. Es gilt hierfür

$$\delta_\infty = \frac{\nu}{-v_0}, \quad \frac{\delta^*}{\theta} = 2, \quad \tau_{0\infty} = -\varrho U_0 v_0, \quad K = 0, \quad \delta_1 = \delta^*_\infty, \quad \lambda_1 = 1, \quad \varkappa_1 = \frac{1}{2}. \tag{56}$$

Wir berechnen jetzt den Anlauf, d. h. das Anwachsen der Grenzschicht vom Wert Null an der Plattenvorderkante auf den angegebenen asymptotischen Wert. In unserem Formelsystem ist für den Anlauf zu setzen $\tilde{\lambda} = 0$, $\varkappa = 0$. Damit wird nach (14)

$$K = \frac{\lambda_1 - 1}{1 - c\,\lambda_1} \tag{57}$$

mit der Abkürzung

$$c = 1 - \frac{\pi}{6} = 0{,}4764 \tag{58}$$

und nach (17)

$$\frac{\theta}{\delta_1} = g(0, \lambda_1) = \frac{p_0 + p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_1^2}{(1 - c\,\lambda_1)^2} \tag{59}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= -\frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} = 0{,}40986\,, \quad p_1 = 3 + \frac{\pi}{6} - \frac{12}{\pi} - \frac{\pi}{6} C_1 = 0{,}06656\,, \\ p_2 &= -2 + \frac{6}{\pi} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{\pi}{6} C_1 = 0{,}5819\,. \end{aligned}\right| \tag{60}$$

Ferner ist nach (16)

$$\frac{\delta^*}{\delta_1} = 3 - \frac{6}{\pi} + \lambda_1\left(-3 + \frac{6}{\pi} + \frac{\pi}{6}\right). \tag{61}$$

Die Wandschubspannung wird nach (11) und (13)

$$\tau_0 = \mu \frac{U_0}{\delta_1} \frac{\pi/6}{1 - c\,\lambda_1} = -\varrho\, v_0\, U_0 \frac{\pi/6}{\lambda_1 (1 - c\,\lambda_1)}\,. \tag{62}$$

Die Differentialgleichung (28) nimmt im vorliegenden Fall die Form an

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{G(0, \varkappa_1)}{U_0} \quad \text{mit} \quad \varkappa_1 = -v_0 \sqrt{\frac{Z}{\nu}} \quad \text{und} \quad v_0 = \text{konst.} < 0\,. \tag{63}$$

Für die Integration dieser Differentialgleichung braucht man den expliziten Ausdruck für $G(0, \varkappa_1)$. Nach (32) und (33) ist

$$G(0, \varkappa_1) = 2\,g\left(\frac{\pi/6}{1 - c\,\lambda_1} - \lambda_1\right) = 2\,g(1 - \lambda_1) \frac{\frac{\pi}{6} - c\,\lambda_1}{1 - c\,\lambda_1}\,. \tag{64}$$

Es ist also $G(0, \varkappa_1) = 0$ für $\lambda_1 = 1$. Somit ist $\lambda_1 = 1$ eine Lösung der Impulsgleichung; sie entspricht der asymptotischen Lösung. Der Anfangswert an der Plattenvorderkante ist $\lambda_1 = 0$. Im Anlauf läuft somit λ_1 von 0 bis $+1$.

Führt man als dimensionslose Lauflänge ein

$$\xi = \frac{U_0 x}{\nu} \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2, \tag{65}$$

so läßt sich die Differentialgleichung (63) schreiben in der Form

$$\frac{d(\varkappa_1^2)}{d\xi} = G(\varkappa_1)\,; \quad \text{Anfangswert } \xi = 0\,, \varkappa_1 = 0\,. \tag{66}$$

Der Zusammenhang zwischen $\varkappa_1$ und λ_1 ist gegeben durch

$$\varkappa_1 = \lambda_1\, g(\lambda_1)\,. \tag{67}$$

mit $g(\lambda_1)$ nach (59).

Die Differentialgleichung (66) kann nach dem Isoklinenverfahren gelöst werden. Im vorliegenden Fall gelingt jedoch auch eine analytische Lösung, welcher wir den Vorzug geben. Aus (66) folgt zunächst

$$2\varkappa_1 \frac{d\varkappa_1}{d\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\xi} = G(\varkappa_1)\,. \tag{68}$$

Hier können am besten alle Größen durch λ_1 ausgedrückt werden, so daß sich eine Differentialgleichung für $\lambda_1(\xi)$ ergibt. Mit $dx_1/d\lambda_1$ nach (67) erhält man aus (68) nach Division durch $2g$, da dieses im Bereich $0 \leqq \lambda_1 \leqq 1$ nicht verschwindet,

$$\lambda_1 \left(g + \lambda_1 \frac{dg}{d\lambda_1}\right) \frac{d\lambda_1}{d\xi} = (1-\lambda_1)\ \frac{\frac{\pi}{6} - c\,\lambda_1}{1 - c\,\lambda_1}\ ;\ \text{Anfangswert: } \xi = 0 : \lambda_1 = 0\ . \tag{69}$$

Wegen $g(0,0) = p_0 = 6/\pi - 3/2$ erhält man hieraus in der Umgebung von $\xi = 0$, $\lambda_1 = 0$

$$\frac{d\xi}{d\lambda_1} = \frac{6}{\pi}\, p_0\, \lambda_1 = \frac{6}{\pi}\left(\frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}\right)\lambda_1 \tag{70}$$

und

$$\xi = \frac{3}{\pi}\left(\frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}\right)\lambda_1^{\,2} = 0{,}391\ \lambda_1^{\,2}\ . \tag{71}$$

Hieraus folgt für die Nähe der Plattenvorderkante ($\xi = 0$)

$$\lambda_1 = 1{,}60 \sqrt{\xi} \quad \text{oder} \quad \frac{-v_0 \delta_1}{\nu} = 1{,}60 \sqrt{\xi}\ .$$

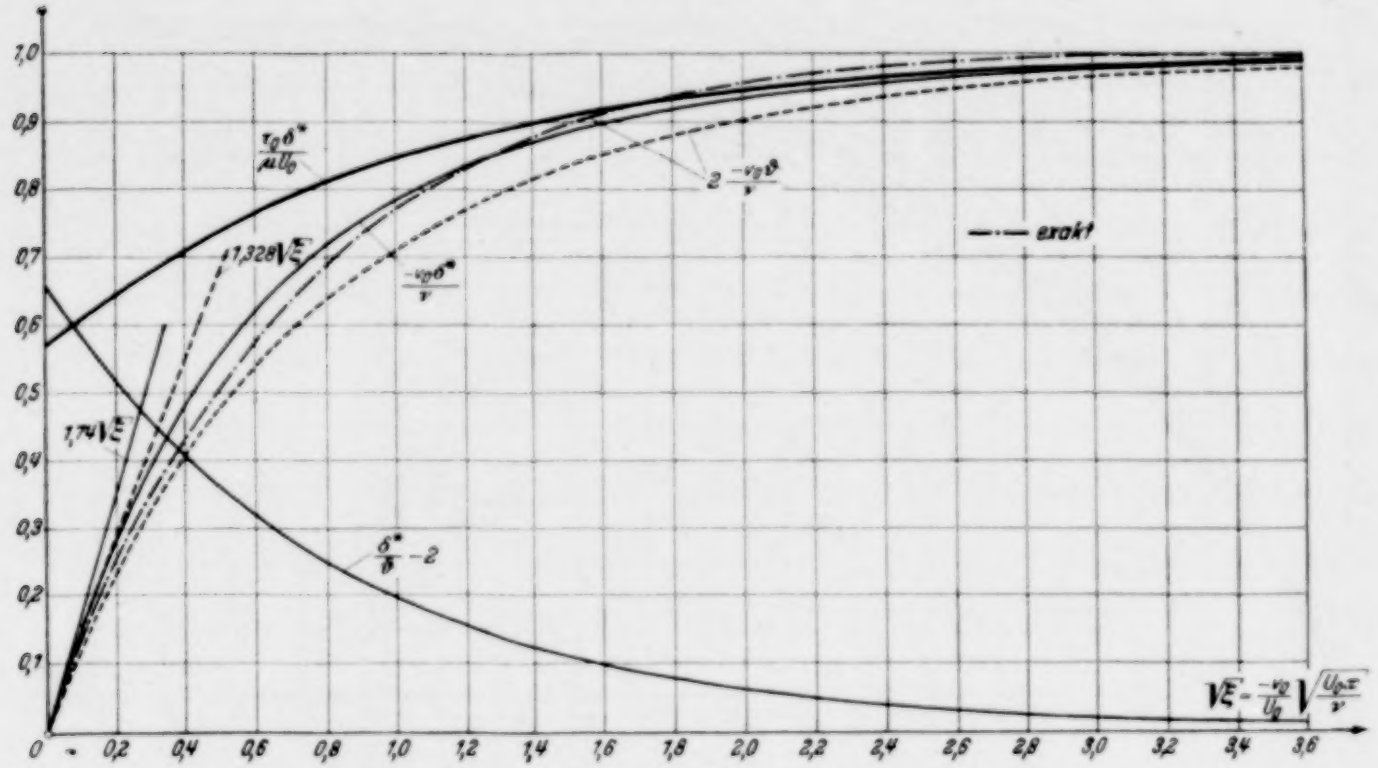


Abb. 8. Der Anlauf bei der ebenen Platte mit homogener Absaugung: $\frac{-v_0\delta^*}{\nu}$, $\frac{-v_0\vartheta}{\nu}$, $\frac{\delta^*}{\vartheta}$, $\frac{\tau_0\delta^*}{\mu U_0}$ über $\sqrt{\xi}$.

Wegen $\delta^*/\delta_1 = 3 - \frac{6}{\pi}$ folgt hieraus $-v_0\delta^*/\nu = (\pi - 2)\sqrt{2/4 - \pi}\sqrt{\xi}$ oder $\delta^* = (\pi - 2)\sqrt{2/4 - \pi}\sqrt{\nu x/U_0} = 1{,}742\sqrt{\nu x/U_0}$. Wie der Vergleich mit (49) zeigt, beginnt also an der Plattenvorderkante die Grenzschichtdicke mit dem Wert für die Platte ohne Absaugung.

Um nun (69) zu integrieren, sind die expliziten Werte von $g(\lambda_1)$ und $dg/d\lambda_1$ nach (59) einzusetzen. Man erhält nach einiger Zwischenrechnung

$$\frac{d\xi}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_1 (P_0 + P_1\lambda_1 + P_2\lambda_1^{\,2} + P_3\lambda_1^{\,3})}{(1 - c\,\lambda_1)^2 (1 - \lambda_1)\left(\frac{\pi}{6} - c\,\lambda_1\right)} \tag{72}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= p_0 = 0{,}40986\ , \quad P_1 = 2p_1 + p_0 c = -0{,}4667\ , \\ P_2 &= 3p_2 = 0{,}17457\ , \quad P_3 = -c\,p_2 = -0{,}02772\ . \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Die Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{d\xi}{d\lambda_1} = \frac{P_3}{c^3} + \frac{K_1}{\lambda_1 - 1} + \frac{K_2}{c\,\lambda_1 - \frac{\pi}{6}} + \frac{K_3}{(c\,\lambda_1 - 1)^2} + \frac{K_4}{c\,\lambda_1 - 1} = f'(\lambda_1)\ . \tag{74}$$

Die Integration mit dem Anfangswert $\lambda_1 = 0$ für $\xi = 0$ liefert

$$\xi = \frac{P_3}{c^3}\lambda_1 + K_1 \ln(1-\lambda_1) + \frac{K_2}{c}\ln\left(1-\frac{6c}{\pi}\lambda_1\right) - K_3\frac{\lambda_1}{c\lambda_1 - 1} + \frac{K_4}{c}\ln(1-c\lambda_1) = f(\lambda_1). \quad (75)$$

Die K_1 bis K_4 ergeben sich aus der Partialbruchzerlegung zu

$$K_1 = -6{,}9560\,,\quad K_2 = 3{,}4704\,,\quad K_3 = -0{,}2284\,,\quad K_4 = -0{,}1569\,. \quad (76)$$

Damit lautet die Lösung endgültig

$$\left.\begin{aligned}\xi = {} & -0{,}2564\,\lambda_1 - 6{,}956\ln(1-\lambda_1) + 7{,}2846\ln(1-0{,}9099\,\lambda_1) + 0{,}2284\,\lambda_1/0{,}4764\,\lambda_1 - 1 - \\ & - 0{,}3293\ln(1-0{,}4764\,\lambda_1)\,.\end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Aus $\lambda_1(\xi)$ können dann auch sogleich sämtliche übrigen Grenzschichtparameter nach (58), (59), (61), (62) berechnet werden. In Abb. 8 sind $-v_0\delta^*/\nu$, $-v_0\vartheta/\nu$, δ^*/ϑ, sowie $\tau_0\delta^*/\mu U_0$ über $\sqrt{\xi}$

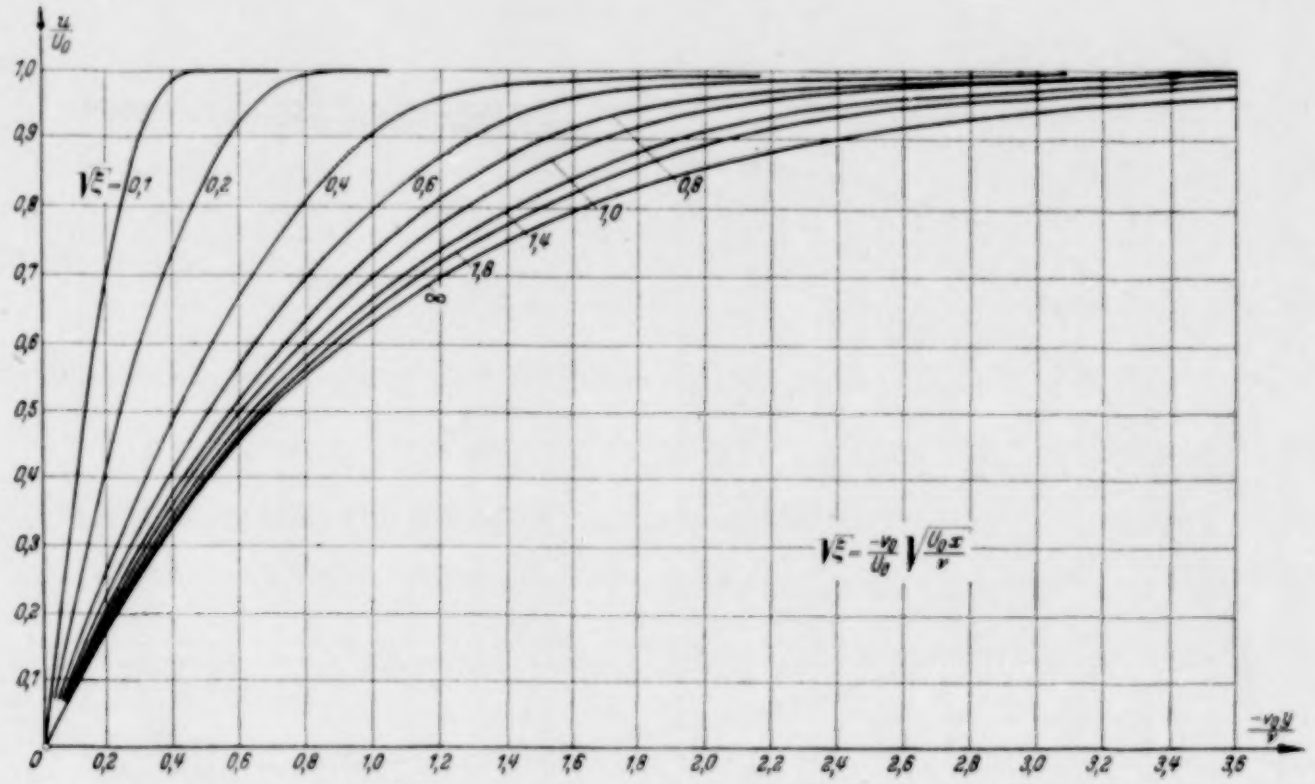


Abb. 9. Ebene Platte mit homogener Absaugung; Geschwindigkeitsverteilung im Anlauf.

aufgetragen. Die Verdrängungsdicke der Grenzschicht erreicht 0,95 ihres asymptotischen Wertes nach einer Anlauflänge von $\xi_A = (v_0/U_0)^2\, U_0\, x_A/\nu \approx 4{,}5$. Die Geschwindigkeitsprofile im Anlauf in der Auftragung u/U_0 über $-v_0 y/\nu = \eta\,\lambda_1$ sind in Abb. 9 dargestellt. Für die Wandschubspannung erhält man aus (62) und (4a)

$$\frac{\tau_0}{\tau_{0\infty}} = \frac{\pi/6}{\lambda_1(1-c\lambda_1)}\,. \quad (78)$$

Die Wandschubspannung ist in Abb. 10 in Abhängigkeit von $\sqrt{\xi}$ aufgetragen.

Für diese Lösung möge auch noch der Reibungswiderstand im Anlauf explizit angegeben werden. Für die asymptotische Lösung ist der örtliche Reibungswiderstand längs der Wand konstant mit $\tau_{0\infty} = -\varrho\, U_0\, v_0$, und somit auch der Beiwert des Gesamtreibungswiderstandes gleich diesem Wert

$$c_{f\infty} = \frac{W_R}{\frac{\varrho}{2}U_0^2\, b\, l} = \frac{\tau_{0\infty}}{\frac{\varrho}{2}U_0^2} = 2\,\frac{-v_0}{U_0}\,. \quad (79)$$

Bei geringen Absaugemengen $-v_0/U_0$ ist die Anlaufstrecke unter Umständen so lang, daß am Ende der Platte der Anlauf bei weitem noch nicht beendet ist.

Der gesamte Reibungswiderstand für die einseitig benetzte Platte ist $W_R = b\int_{x=0}^{l} \tau_0 \, dx$, und mit dem Wert von τ_0 nach (78) und mit τ_0 nach (4a)

$$W_R = -\varrho v_0 U_0 b \frac{\pi}{6} \int_{x=0}^{l} \frac{dx}{\lambda_1 (1 - c\lambda_1)} .$$

Wegen (65) wird hieraus

$$W_R = \varrho b U_0^2 \frac{\nu}{-v_0} \frac{\pi}{6} \int_{\xi=0}^{\xi_l} \frac{d\xi}{\lambda_1 (1 - c\lambda_1)} , \tag{80}$$

wo ξ_l den Wert von ξ am Plattenende bedeutet, also

$$\xi_l = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \frac{U_0 l}{\nu} = f(\lambda_{10}) . \tag{81}$$

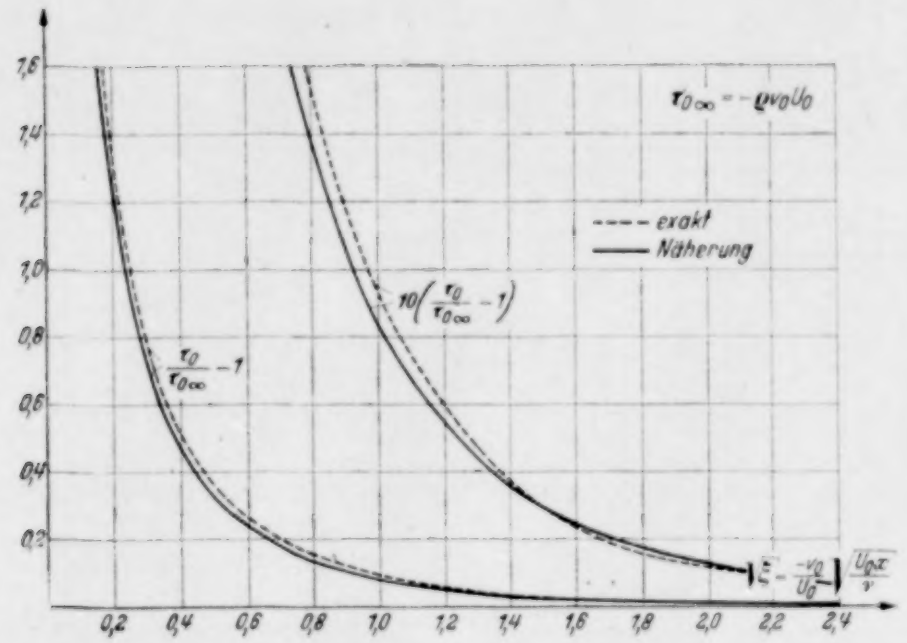


Abb. 10. Ebene Platte mit homogener Absaugung: der örtliche Reibungsbeiwert $\tau_0/\tau_{0\infty}$ über $\sqrt{\xi}$.

Dabei bedeutet λ_{10} den Wert von λ_1 am Ende der Platte, welcher zu $\xi = \xi_l$ aus (75) erhalten wird, somit

$$f(\lambda_{10}) = \frac{P_3}{c^3}\lambda_{10} + K_1 \ln(1 - \lambda_{10}) + \frac{K_2}{c} \ln\left(1 - \frac{6c}{\pi}\lambda_{10}\right) - K_3 \frac{\lambda_{10}}{c\lambda_{10} - 1} + \frac{K_4}{c} \ln(1 - c\lambda_{10}). \tag{82}$$

Führt man jetzt noch in (80) für $d\xi/d\lambda_1 = f'(\lambda_1)$ den Ausdruck (74) ein, so erhält man $W_R = \varrho b U_0^2 \frac{\nu}{-v_0} F(\lambda_{10})$ und

$$c_f = 2 \frac{\nu}{-v_0 l} F(\lambda_{10}) \tag{83}$$

mit

$$F(\lambda_{10}) = \frac{\pi}{6} \int_{\lambda_1 = 0}^{\lambda_{10}} \frac{f'(\lambda_1) d\lambda_1}{\lambda_1 (1 - c\lambda_1)} . \tag{84}$$

Führt man in (83) schließlich noch ein $\nu/-v_0 l = -v_0/U_0 f(\lambda_{10})$ nach (81), so erhält man

$$c_f = 2 \frac{-v_0}{U_0} \frac{F(\lambda_{10})}{f(\lambda_{10})} = 2 \frac{-v_0}{U_0} G(\lambda_{10}) = 2 \frac{-v_0}{U_0} G(\xi_l)$$

oder

$$c_f = c_{f\infty} G(\xi_{10}) . \tag{85}$$

Hierdurch ist wegen des Zusammenhanges von λ_{10} und ξ_l nach (81) die Größe c_f/c_{f_∞} als Funktion der dimensionslosen Lauflänge $\xi_l = (v_0/U_0)^2\, U_0 x/\nu$ gegeben. Andererseits ergibt (81) und (85) bei vorgegebenem Mengenbeiwert der Absaugung $-v_0/U_0$ auch das Widerstandsgesetz c_f über $U_0 l/\nu$ in Form einer Parameterdarstellung. Der Parameter λ_{10} ist die dimensionslose Grenzschichtdicke am Plattenende $\lambda_{10} = (-v_0 \delta_1/\nu)_{x=l}$. Die Werte von λ_{10} liegen zwischen 0 und 1, wobei der erstere Wert an der Plattenvorderkante und der letztere für die asymptotische Lösung nach beendetem Anlauf gilt.

Die Ausrechnung des Integrales $F(\lambda_{10})$ nach (84) ergibt

$$F(\lambda_{10}) = -0{,}3288\, ln\,(1-0{,}4764\,\lambda_{10}) - 6{,}956\, ln\,(1-\lambda_{10}) + 7{,}2846\, ln\,(1-0{,}9099\,\lambda_{10}) - \left| \right.$$
$$\left. - 0{,}0374\, \frac{0{,}4764\,\lambda_{10}}{1-0{,}4764\,\lambda_{10}} - 0{,}05980\, \frac{0{,}4764\,\lambda_{10}(2-0{,}4764\,\lambda_{10})}{(1-0{,}4764\,\lambda_{10})^2} \right| \qquad (86)$$

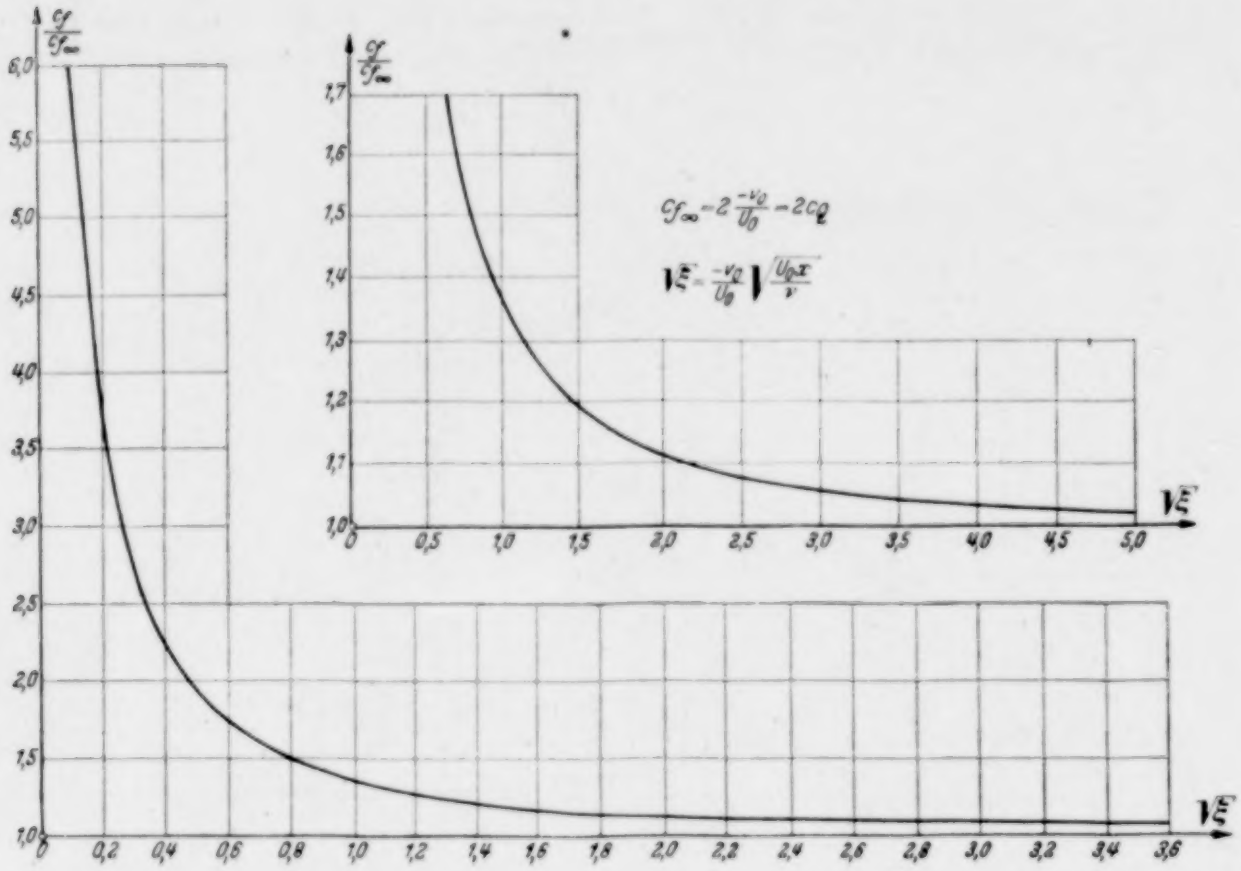


Abb. 11. Ebene Platte mit homogener Absaugung: Der Beiwert des Gesamtwiderstandes c_f/c_{f_∞} über $\sqrt{\xi} = \frac{-v_0}{U_0}\sqrt{\frac{U_0 x}{\nu}}$.

Für $\lambda_{10} \to 1$, d. i. $\xi_l \to \infty$ gilt, wie man aus (86) und (75) sofort abliest,

$$\lambda_{10} \to 1 : \frac{F(\lambda_{10})}{f(\lambda_{10})} = G(\lambda_{10}) = 1 \qquad (86a)$$

und somit $c_f \to c_{f_\infty}$ für $\xi_l \to \infty$. Andererseits gilt in der Nähe der Plattenvorderkante, d. i. für $\lambda_{10} \to 0$, nach (71):

$$\lambda_{10} \to 0 : f(\lambda_{10}) = \frac{3}{\pi}\left(\frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}\right)\lambda_{10}^2$$

und somit nach (84)

$$\lambda_{10} \to 0 : F(\lambda_{10}) = \left(\frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}\right)\lambda_{10},$$

also

$$\lambda_{10} \to 0 : G(\lambda_{10}) = \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{\lambda_{10}}. \qquad (86b)$$

Setzt man diesen Wert in (85) ein, und beachtet man, daß für kleine λ_{10} nach (71) gilt: $\lambda_{10} = \sqrt{\xi_l}/\sqrt{\frac{3}{\pi}\left(\frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}\right)}$, so erhält man $c_f = 2\,\frac{-v_0}{U_0}\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}/\sqrt{\xi_l}$, oder

$$c_f = \sqrt{8 - 2\pi}\left(\frac{U_0 l}{\nu}\right)^{-1/2},$$

also das Widerstandsgesetz der Platte ohne Absaugung nach (50).

Das Widerstandsgesetz (85) ist in Abb. 11 dargestellt. Ferner gibt Abb. 12 das Widerstandsgesetz in der Form c_f über $U_0 l/\nu$ für verschiedene Werte des Mengenbeiwertes $-v_0/U_0$. Je größer die Absaugemenge ist, bei um so kleinerer *Reynolds*scher Zahl verläßt die betreffende c_f-Kurve die Widerstandskurve der Platte ohne Absaugung und geht nach einem gewissen Übergangsbereich in die asymptotische Kurve $c_{f\infty} = -2\, v_0/U_0$ über. Diese wird bei um so größerer *Reynolds*scher Zahl erreicht, je geringer die Absaugemenge ist.

Die hier angegebenen Widerstandsbeiwerte geben den gesamten Widerstand der Platte mit Absaugung. Ein besonderer Senkenwiderstand kommt nicht mehr hinzu, da bei kontinuierlicher Absaugung, wie im vorliegenden Falle, die abgesaugten Flüssigkeitsteilchen ihren gesamten x-Impuls schon in der Grenzschicht abgeben, und dieser somit schon im Reibungswiderstand enthalten ist. Um die gesamte Schleppleistung der Platte mit Absaugung zu erhalten, muß jedoch

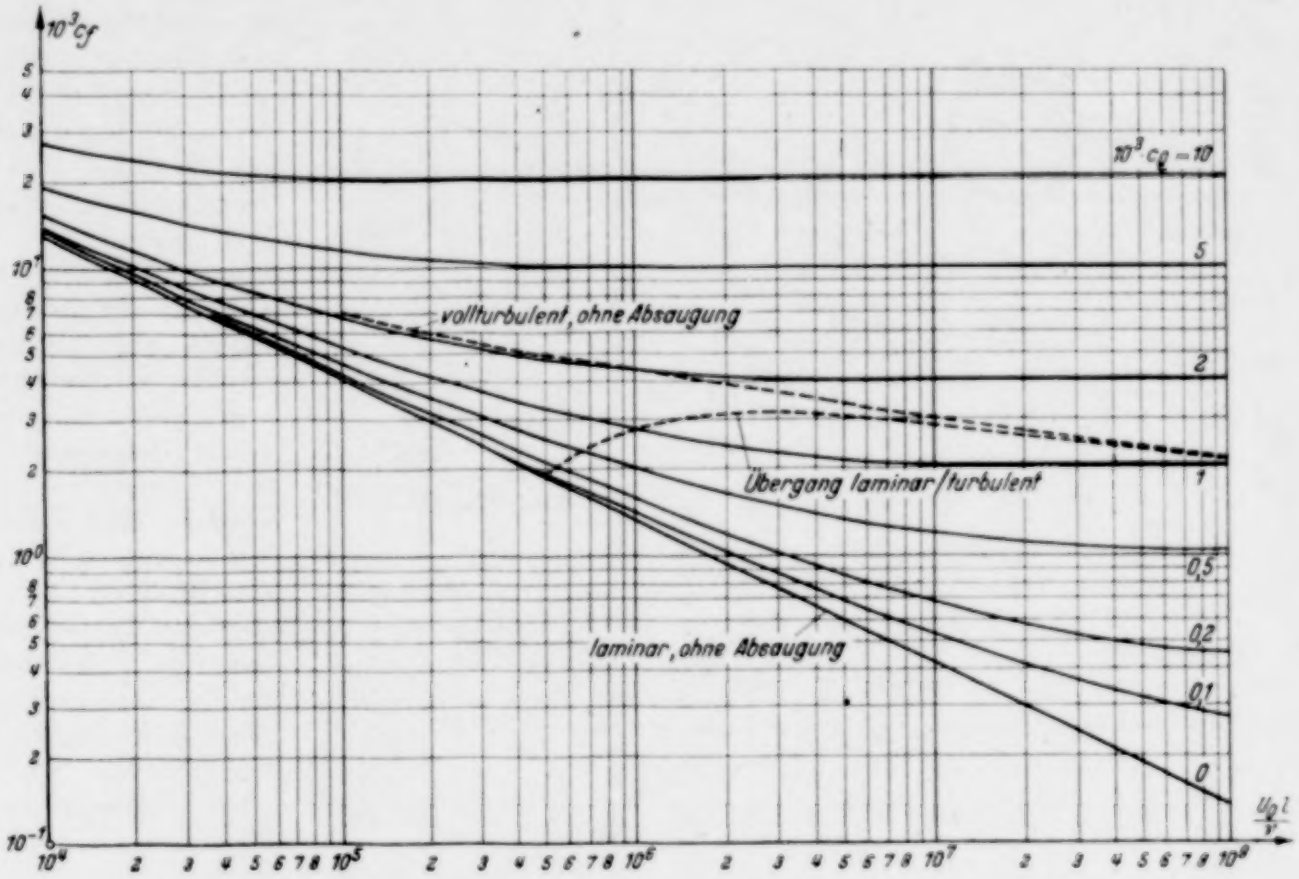


Abb. 12. Ebene Platte mit homogener Absaugung: Der Beiwert des Gesamtwiderstandes c_f über $U_0 l/\nu$ für verschiedene Mengenbeiwerte der Absaugung $-v_0/U_0 = c_Q$.

außer dem hier angegebenen Widerstand noch die Gebläseleistung der Absaugung in Rechnung gestellt werden.

Für den hier behandelten Fall ist in neuester Zeit von *R. Iglisch*[1] auch die exakte Lösung auf Grund der Grenzschichtdifferentialgleichungen angegeben worden. In Abb. 8 und 10 sind zum Vergleich Ergebnisse der exakten Lösung mit eingetragen worden. Die Übereinstimmung zwischen unserer Näherung und der exakten Lösung ist gut.

Demnach ist zu hoffen, daß auch für andere Fälle, wo sich exakte Lösungen mit erträglichem Rechenaufwand nicht mehr beschaffen lassen, unsere Näherungsrechnung befriedigende Ergebnisse liefert. In letztem Abschnitte sollen noch einige solche Fälle behandelt werden.

c) Der Kreiszylinder mit homogener Absaugung[2]. Als erstes solches Beispiel wollen wir den Kreiszylinder mit homogener Absaugung auf dem ganzen Umfang bei verschiedenen Absaugemengen behandeln. Die Potentialströmung ist (Abb. 13)

$$U(x) = 2\, U_0 \sin \frac{x}{R}\,. \tag{87}$$

[1] *R. Iglisch*, Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, Bd. 8 B (1944), Heft 1.

[2] Die numerischen Rechnungen dieses und des folgenden Abschnittes wurden von Herrn *A. Ulrich* ausgeführt.

Wählen wir den Zylinderradius R als Bezugslänge, so gilt

$$K_1 = \frac{R}{U_0}\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 = 2 \tag{88}$$

und somit nach (36) für den Mengenbeiwert

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-v_0}{U_0} \sqrt{\frac{U_0 R}{\nu}}. \tag{89}$$

Die Ergebnisse (Verdrängungsdicke δ^* und Formparameter $\varkappa$) sind in Abb. 13 angegeben. Für den Fall ohne Absaugung ergibt sich als Ablösungspunkt $\varphi = 101{,}7°$; dies ist etwas weiter vorn als bei dem *Pohlhausen*-Verfahren, wo sich $\varphi = 108{,}9°$ ergibt. Mit wachsender Absaugemenge ergibt sich eine Verringerung der Grenzschichtdicke und eine Verschiebung des Ablösungspunktes nach hinten. Um beim Kreiszylinder die Absaugung ganz zu vermeiden, dürfte es zweckmäßig sein, nicht eine homogene Absaugung längs der Kontur zu wählen, sondern eine Verteilung von $v_0(x)$, welche auf der Rückseite erheblich größere Werte hat als auf der Vorderseite. Solche Rechnungen lassen sich nach dem vorliegenden Verfahren ohne Mehraufwand an Rechnung ebenfalls ausführen.

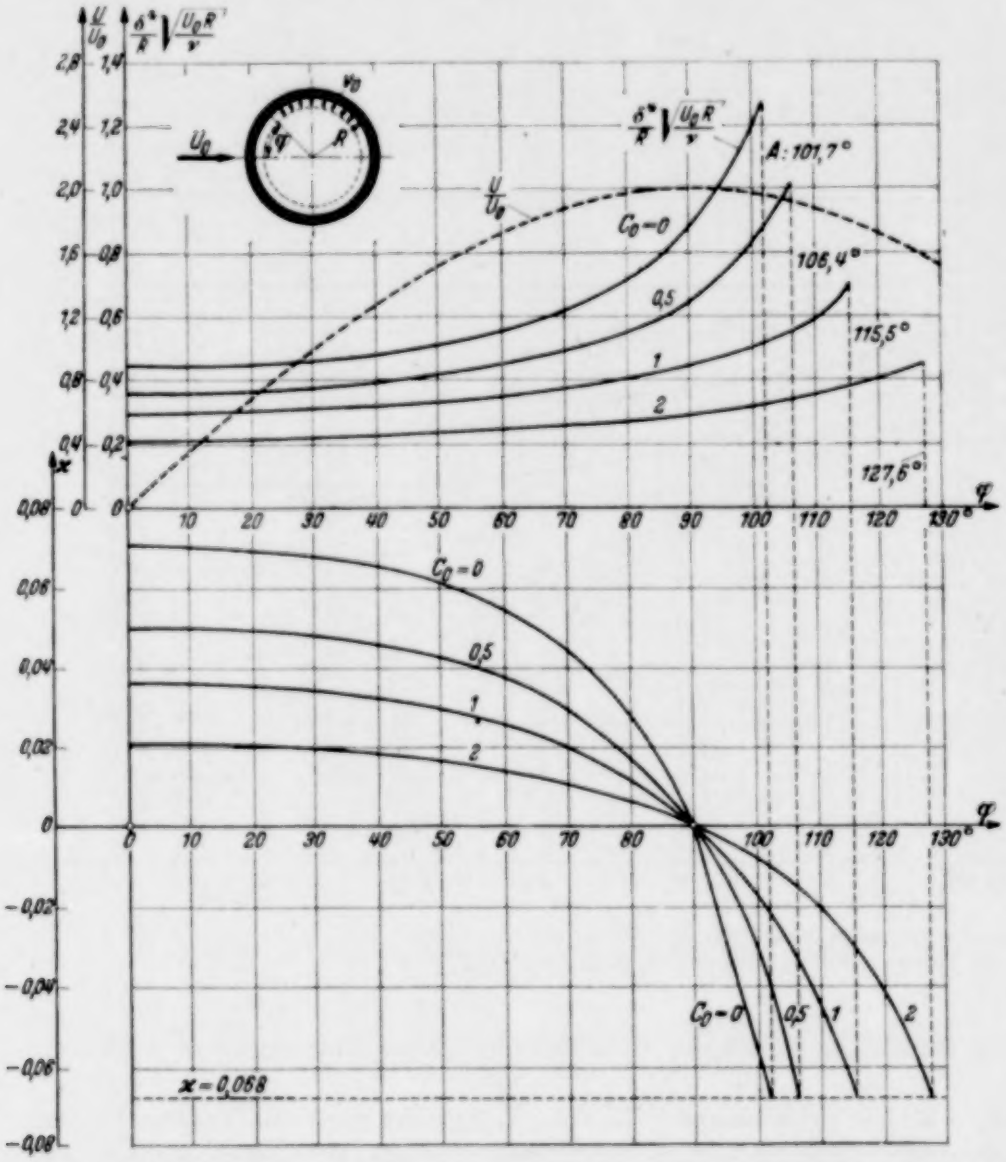


Abb. 13. Die Grenzschicht am Kreiszylinder mit homogener Absaugung bei verschiedenen Absaugemengen $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-v_0}{U_0} \sqrt{\frac{U_0 R}{\nu}}$. Mit wachsender Absaugemenge rückt der Ablösungspunkt nach hinten.

d) Symmetrisches *Joukowsky*-Profil mit homogener Absaugung bei $c_a = 0$. Als letztes Beispiel ist ein symmetrisches *Joukowsky*-Profil von 15% Dicke bei $c_a = 0$ mit homogener Absaugung und verschiedenen Mengenbeiwerten gerechnet worden. Die Absaugung beginnt im Staupunkt und erstreckt sich über die ganze Kontur (Abb. 14). Für die Potentialströmung $U(x)$ läßt sich eine einfache Formel hier nicht angeben; die Verteilung $U(x)/U_0$ ist in Abb. 14 mit eingetragen. Wir wählen als Bezugslänge die Flügeltiefe t. Im Staupunkt ist hier der Geschwindigkeitsgradient der Potentialströmung sehr groß; es ist

$$K_1 = \frac{t}{U_0}\left(\frac{dU}{ds}\right)_0 = 51{,}7 \tag{90}$$

und somit der Mengenbeiwert

$$C_0 = 0{,}139 \frac{-v_0}{U_0} \sqrt{\frac{U_0 t}{\nu}} = 0{,}139\, f_1(0) = 0{,}139\, c_Q^*. \tag{91}$$

Tabelle 1.

Die Funktion $G(\varkappa, \varkappa_1)$ für die Integration der Differentialgleichung der Impulsdicke, nach (32).

$\varkappa_1 = 0$ (ohne Absaugung)			
λ	λ_1	$\varkappa$	$G(\varkappa, \varkappa_1)$
0,50	0	0,1062	−0,2042
0,45	0	0,0937	−0,1323
0,40	0	0,0816	−0,0621
0,3547	0	0,0709	0
0,30	0	0,0586	0,0729
0,25	0	0,0477	0,1375
0,20	0	0,0373	0,2001
0,15	0	0,0273	0,2607
0,10	0	0,0177	0,3191
0,05	0	0,0086	0,3753
0	0	0	0,4292
−0,1	0	−0,0159	0,5301
−0,2	0	−0,0298	0,6213
−0,3	0	−0,0419	0,7023
−0,4	0	−0,0520	0,7730
−0,5	0	−0,0602	0,8330
−0,6	0	−0,0666	0,8820
−0,7	0	−0,0711	0,9198
−0,8	0	−0,0738	0,9470
−0,9	0	−0,0748	0,9617
−1,0	0	−0,0742	0,9656
−1,099	0	−0,0721	0,9584

$\varkappa_1 = 0,1$			
λ	λ_1	$\varkappa$	$G(\varkappa, \varkappa_1)$
0,5	0,206	0,1132	−0,333
0,4	0,210	0,0875	−0,192
0,3	0,215	0,0627	−0,057
0,26	0,218	0,0520	0
0,2	0,221	0,0401	0,072
0,1	0,227	0,0190	0,190
0	0,235	0	0,300
−0,2	0,250	−0,0330	0,490
−0,4	0,270	−0,0550	0,635
−0,6	0,290	−0,0710	0,742
−0,8	0,320	−0,0775	0,792
−1,099		−0,0721	0,758

$\varkappa_1 = 0,2$			
λ	λ_1	$\varkappa$	G
0,5	0,405	0,1213	−0,450
0,4	0,415	0,0936	−0,310
0,3	0,424	0,0674	−0,172
0,2	0,432	0,0431	−0,095
0,16	0,436	0,0350	0
0,1	0,443	0,0205	0,077
0	0,454	0	0,188
−0,2	0,480	−0,0355	0,370
−0,4	0,515	−0,0590	0,516
−0,6	0,557	−0,0770	0,620
−0,8	0,620	−0,0835	0,657
−1,099		−0,0721	0,558

$\varkappa_1 = 0,3$			
λ	λ_1	$\varkappa$	$G(\varkappa, \varkappa_1)$
0,5	0,590	0,1292	−0,542
0,4	0,600	0,100	−0,400
0,3	0,611	0,0722	−0,265
0,2	0,622	0,0463	−0,136
0,1	0,637	0,0222	−0,016
0,09	0,639	0,0192	0
0	0,652	0	0,099
−0,2	0,688	−0,0380	0,294
−0,4	0,738	−0,0660	0,438
−0,6	0,808	−0,0830	0,520
−0,8	0,892	−0,0910	0,555
−1,099	1,172	−0,0721	0,358

$\varkappa_1 = 0,4$			
λ	λ_1	$\varkappa$	$G(\varkappa, \varkappa_1)$
0,4	0,770	0,1068	−0,460
0,3	0,782	0,0777	−0,324
0,2	0,800	0,0500	−0,200
0,1	0,815	0,0202	−0,080
0,04	0,826	0,008	0
0	0,835	0	0,035
−0,2	0,875	−0,0415	0,232
−0,4	0,935	−0,0730	0,375
−1,099		−0,0721	0,158

$\varkappa_1 = 0,5$			
λ	λ_1	$\varkappa$	$G(\varkappa, \varkappa_1)$
0,4	0,935	0,113	−0,475
0,3	0,950	0,0825	−0,350
0,2	0,965	0,0538	−0,225
0,1	0,982	0,0220	−0,100
0	1,0	0	0
−0,2	1,045	−0,0460	0,195
−0,4	1,115	−0,0810	0,320
−1,099		−0,0721	−0,042

$\varkappa_1 = 0,6$			
λ	λ_1	$\varkappa$	$G(\varkappa, \varkappa_1)$
0,3	1,116	0,088	−0,327
0,2	1,122	0,056	−0,206
0,1	1,135	0,020	−0,072
0	1,154	0	0
−0,2	1,200	−0,048	0,190
−0,4	1,254	−0,086	0,340

$\varkappa_1 = 0,7$			
λ	λ_1	$\varkappa$	$G(\varkappa, \varkappa_1)$
0,3	1,294	0,089	−0,125
0,2	1,292	0,059	−0,082
0,1	1,296	0,030	−0,005
0	1,304	0	0,089
−0,2	1,338	−0,054	0,262
−0,4	1,401	−0,096	0,402

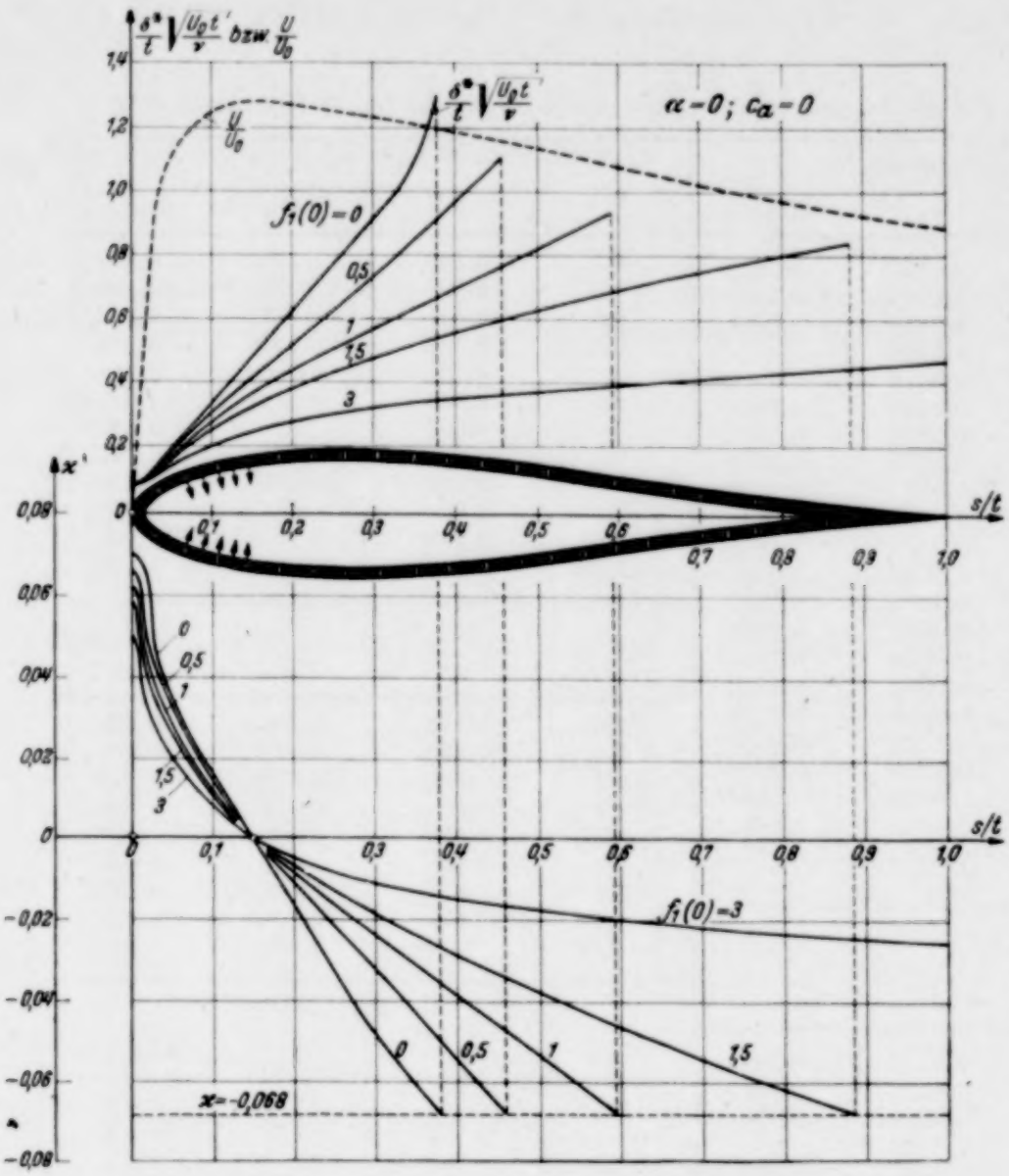


Abb. 14. Die Grenzschicht an einem symmetrischen *Joukowsky*-Profil von 15% Dicke mit $c_a=0$ bei homogener Absaugung mit verschiedenen Absaugemengen

$$C_Q=\frac{1}{\sqrt{K_1}}\,\frac{-v_0}{U_0}\sqrt{\frac{U_0 t}{\nu}}=f_1(0)\sqrt{K_1};\quad K_1=51{,}7.$$

Die Ergebnisse (Verdrängungsdicke δ^* und Formparameter $\varkappa$) sind in Abb. 14 angegeben. Auch hier ergibt sich mit wachsender Absaugemenge eine beträchtliche Verminderung der Grenzschichtdicke und eine Verschiebung des Ablösungspunktes nach hinten. Für Absaugemengen $c_Q^*>1{,}7$, d. i. $C_Q>0{,}236$, ergibt sich keine Ablösung mehr.

5. Zusammenfassung. Es wird ein Näherungsverfahren entwickelt zur Berechnung der laminaren Grenzschicht mit Absaugung bei beliebiger Körperform und beliebiger Verteilung der Absaugegeschwindigkeit längs der Kontur des umströmten Körpers. Das Verfahren hat Verwandtschaft mit dem bekannten *Pohlhausen*-Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht ohne Absaugung. Die Berechnung erfordert die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung nach dem Isoklinen-Verfahren. Das Verfahren wird zunächst an einigen Fällen ohne Absaugung erprobt, für welche exakte Lösungen vorliegen. Danach werden die längsangeströmte ebene Platte mit homogener Absaugung, der Kreiszylinder und ein symmetrisches *Joukowsky*-Profil mit homogener Absaugung behandelt.

Tabelle 2.

Anfangswerte der Grenzschichtparameter im Staupunkt.

λ_1	λ	K	g	$\varkappa_0$	$\varkappa_{10}$
0	0,355	−0,645	0,447	0,0709	0
0,2	0,262	−0,600	0,452	0,0536	0,0904
0,4	0,117	−0,530	0,459	0,0372	0,184
0,5	0,139	−0,473	0,463	0,0299	0,231
0,6	0,100	−0,420	0,468	0,0219	0,281
0,7	0,069	−0,346	0,474	0,0155	0,332
0,8	0,042	−0,256	0,481	0,0098	0,385
1,0	0	0	0,500	0	0,500

(Eingegangen am 16. April 1947.)

Die Formänderungsenergiesätze in Anwendung auf den elastisch-plastischen Zustand*.

Von **W. Swida** in Karlsruhe.

1. Die erweiterten Sätze von Castigliano und einige neue Zusammenhänge. a) Der ideal-plastische Zug. Im folgenden werden hauptsächlich graphische Darstellungen der physikalischen Abhängigkeiten bevorzugt, die die Beweisführung sehr verdeutlichen. Wir betrachten zunächst einen prismatischen Stab, der durch die über die Endquerschnitte gleichmäßig verteilten und allmählich wachsenden Kräfte P beansprucht wird. Der Stab besteht aus einem ideal-plastischen Stoff, bei welchem plastische Deformationen gleichzeitig in allen Punkten aller Querschnitte auftreten.

Das (P, δ)-Diagramm für diesen Fall ist in Abb. 1 dargestellt.

Ist das Abhängigkeitsgesetz geradlinig (der Teil OA), so ist die innere Formänderungsenergie gleich groß wie die entsprechende Arbeit der äußeren Kräfte. Die Größe jeder von ihnen kann durch die Fläche des Dreiecks $O\,C\,B$ dargestellt werden. Der Flächeninhalt des Dreiecks $O\,C\,B$ ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks $O\,C\,D$. Deshalb kann der letztere auch als ein Maß für die gespeicherte Energie dienen.

Wir bezeichnen weiterhin die Arbeit der äußeren Kräfte mit U und die im Material gespeicherte Energie mit U_k. Solange der Vorgang elastisch ist, ist

$$U_k = U\,.$$

Nun betrachten wir zwei Flächenstreifen $B\,C\,C_1\,B_1$ und $D\,C\,C_1\,D_1$. Sie sind gleichgroß und stellen die Zunahme $d\,U_k$ der inneren Energie (oder der Arbeit der äußeren Kräfte) für den Fall dar, daß die Kraft P einen unendlich kleinen Zuwachs $d\,P$ erfährt.

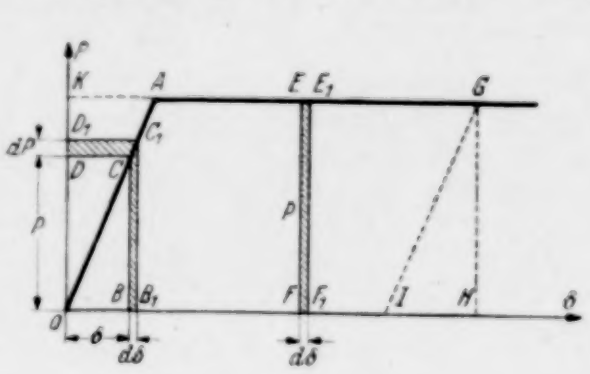


Abb. 1.

Aus Abb. 1 kann man ersehen, daß

$$d\,U_k = d\,U = P\,d\delta = \delta\,d\,P$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{d\,U_k}{d\,\delta} = \frac{d\,U}{d\,\delta} = P\,. \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d\,U_k}{d\,P} = \frac{d\,U}{d\,P} = \delta\,. \qquad \text{(b)}$$

Das sind die bekannten Sätze von *Castigliano* für den elastischen Zustand.

Die Bedingung $U_k = U$ besteht nicht mehr nach dem Übergang in den plastischen Zustand (Gerade AG). Hierbei wächst die durch die gleichbleibende Kraft P geleistete Arbeit U ununterbrochen. Sie kann für jeden Augenblick durch den Flächeninhalt $O\,A\,E\,F$ dargestellt werden. Die im Material gespeicherte (potentielle) Energie U_k bleibt dagegen im Laufe des ganzen plastischen Vorganges konstant. Sie kann bei der Entlastung zurückgewonnen werden und als Flächeninhalt des Dreiecks $J\,G\,H$, das dem Dreieck $O\,A\,K$ gleich ist, dargestellt werden. Das Parallelogramm $O\,A\,G\,J$ stellt die Arbeit der äußeren Kräfte dar, welche zur Überwindung des inneren Zusammenhaltes des Stoffes verbraucht wird und dabei in Wärmeenergie übergeht. Man bezeichnet diese mit U_w.

Der elementare Flächenstreifen $E\,E_1\,F_1\,F$ ist die Zunahme der Arbeit der äußeren Kräfte, wenn die Verlängerung δ einen Zuwachs $d\delta$ erhält. Sie läßt sich darstellen durch $d\,U = P\,d\delta$. Daraus folgt

$$\frac{d\,U}{d\,\delta} = P\,. \qquad \text{(c)}$$

Die Abhängigkeit (*b*) gilt nicht mehr, weil die Kraft P eine Konstante und $d\,U_k = 0$ ist. Also ist der Zuwachs der Kraft eine notwendige Bedingung für die weitere Bildung potentieller Energie. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist

$$U = U_k + U_w\,.$$

* Nach einem Vortrag auf der Mathematiker-Tagung in Karlsruhe, Ostern 1947, Mitteilung I.

Dabei besteht die potentielle Formänderungsenergie U_k ausschließlich aus elastischer (rückgewinnbarer) Energie.

Etwas anderes beobachten wir in einem komplizierteren Falle der Deformation (Biegung. Torsion, zusammengesetzte Festigkeit). Einen solchen Fall wollen wir jetzt betrachten.

b) Der allgemeine Fall. Wir nehmen an, daß die Linie OAB in Abb. 2 den Zusammenhang zwischen einer verallgemeinerten Kraft P und der entsprechenden Verschiebung δ darstellt, z. B. bei der Biegung eines Balkens durch eine Einzellast P oder bei der Torsion eines Stabes durch ein Kräftepaar. In diesem Falle muß die Kraft P durch ein Moment M_t ersetzt werden, und die Verschiebung δ stellt den Verdrehungswinkel dar. Der Begriff „verallgemeinerte Kraft" wurde schon in der Fachliteratur behandelt[1]. Z. B. erscheint im Falle eines Balkens, der durch eine Einzellast P beansprucht wird, als verallgemeinerte Kraft die Vereinigung der Last mit den entsprechenden Auflagerwiderständen.

Der gerade Abschnitt OA in Abb. 2 entspricht dem elastischen Zustand, AB dem elastisch-plastischen. P_f ist die verallgemeinerte Kraft, die dem Beginn der Plastifizierung an irgendeiner Stelle in dem zu betrachtenden System entspricht. P_s ist der Grenzwert von P.

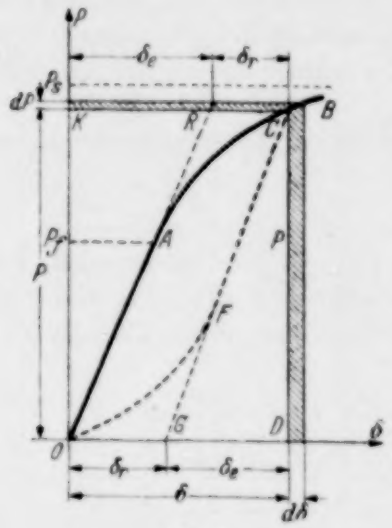


Abb. 2.

Es ist offenbar, daß bei beliebigen Werten P und δ die gesamte geleistete Arbeit U durch den Inhalt der Fläche $OACD$ ausgedrückt werden kann. Der Inhalt des Dreiecks GCD oder des gleichgroßen Dreiecks OKR stellt denjenigen Teil U_e der potentiellen Energie U_k dar, der bei Entlastung zurückgewonnen werden kann. Man nennt diesen Teil die „elastische Energie".

Die gesamte Verschiebung δ besteht in diesem Fall aus zwei Teilen: der elastischen (bei Entlastung verschwindenden) Verschiebung δ_e und der bei Entlastung bleibenden Restverschiebung δ_r. In Abb. 2 stellt der Abschnitt $GD = KR$ die elastische Verschiebung δ_e und der Abschnitt $OG = RC$ die Restverschiebung δ_r dar.

Dementsprechend wird die gesamte im Material der zu betrachtenden Konstruktion gespeicherte (potentielle) Energie U_k in zwei Teile aufgeteilt. Der erste Teil ist die schon erwähnte „elastische Energie U_e". Das Maß für die Größe dieser Energie ist der Flächeninhalt des Dreiecks OKR. Der zweite Teil verbleibt im Material als „Energie der Restformänderungen U_r". Der Inhalt der Fläche ARC oder der gleichgroßen Fläche OFG ist das Maß für die Größe der Restformänderungsenergie. Dann kann die gesamte Energie

$$U_k = U_e + U_r$$

als der Inhalt der Fläche $OKCA$ dargestellt werden.

Die bei Entlastung nicht rückgewinnbare Arbeit $OACG$ besteht auch aus zwei Teilen. Der erste Teil (die Fläche OFG) ist die Restformänderungsenergie. Der zweite Teil (die Fläche $OACF$) wird zur Überwindung des inneren Zusammenhaltes des Stoffes bei der plastischen Formänderung verbraucht und geht hauptsächlich in Wärmeenergie über. Wir bezeichnen diesen Teil mit U_w. Die gesamte geleistete Arbeit ist

$$U = U_e + U_r + U_w = U_k + U_w .$$

Nun wollen wir voraussetzen, daß die veränderliche Kraft P einen Zuwachs dP erhält. Bei Betrachtung der in der Zeichnung schraffierten Flächen ersieht man, daß

$$dU = P\,d\delta, \qquad dU_k = \delta\,dP;$$
$$dU_e = \delta_e\,dP, \qquad dU_r = \delta_r\,dP;$$

ist. Hieraus folgt

$$\frac{dU}{d\delta} = \frac{d(U_e + U_r + U_w)}{d\delta} = P, \tag{1}$$

$$\frac{dU_k}{dP} = \frac{d(U_e + U_r)}{dP} = \delta. \tag{2}$$

[1] Siehe z. B. *S. Timoshenko*, Strength of Materials, Bd. 1, 1930.

$$\frac{dU_e}{dP} = \delta_e , \tag{3}$$

$$\frac{dU_r}{dP} = \delta_r . \tag{4}$$

Folglich ist

1) der Differentialquotient der gesamten Arbeit U der äußeren Kräfte nach der Verschiebung δ gleich der entsprechenden verallgemeinerten Kraft P, und

2) der Differentialquotient der Summe aus der elastischen Energie U_e und der Energie der Restformänderungen U_r nach der verallgemeinerten Kraft P gleich[1] der dieser Kraft entsprechenden gesamten Verschiebung δ.

Also erweisen sich die Kraft P und die entsprechende Verschiebung δ im Gegensatz zum elastischen Zustand als Ableitungen von verschiedenen Funktionen.

Diese hier aufgestellten Abhängigkeiten (1) und (2) nennen wir die erweiterten Sätze von *Castigliano*.

Die Gleichungen (3) und (4) stellen einige neue Zusammenhänge dar, nämlich:

3) Der Differentialquotient der elastischen (rückgewinnbaren) Formänderungsenergie U_e nach der verallgemeinerten Kraft P ist gleich der bei der Entlastung verschwindenden Verschiebung δ_e.

4) Der Differentialquotient der Energie der Restformänderungen U_r nach der verallgemeinerten Kraft P ist gleich der bei Entlastung bleibenden Restverschiebung δ_r.

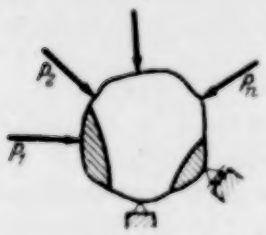


Abb. 3.

Diese Beweisführung kann auch auf den Fall erweitert werden, daß ein Körper sich unter der Wirkung von vielen verallgemeinerten Kräften befindet (Abb. 3), die die Bildung der plastischen Bereiche (schraffiert) hervorgerufen haben.

Die notwendige Bedingung für die Bildung der Restformänderungsenergie ist der Unterschied in der Gesetzmäßigkeit der Spannungsverteilung bei ursprünglicher Belastung und nachfolgender Entlastung, welcher zum Entstehen der Restspannungen und folglich zur Bildung der Restformänderungsenergie führt.

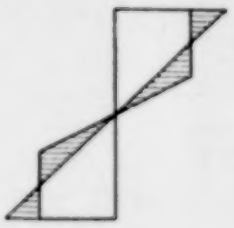


Abb. 4.

Abb. 4 zeigt das übliche Aussehen des Diagrammes der Restspannungen bei der Biegung. In dem von uns früher im Abschnitt a) behandelten Fall des ideal-plastischen Zuges ist das Entstehen der Restformänderungsenergie theoretisch ausgeschlossen, weil die Spannungen während des ganzen Belastungs- und Entlastungsvorganges für jeden Stabquerschnitt gleichmäßig verteilt sind. Nach der Entlastung sind in diesem Fall in einem beliebigen Querschnitt keine Restspannungen mehr vorhanden.

c) Die gesamte Biegeenergie U_k. Jetzt wollen wir eine allgemeine Form der Biegeenergie U_k (Summe aus der elastischen Energie und der Energie der Restformänderungen) aufstellen. Man stelle sich einen Balken (Abb. 5) aus einem idealplastischen Baustoff vor, der durch ein beliebiges Kräftesystem beansprucht wird. Es wird angenommen, daß einige Balkenabschnitte,

Abb. 5.

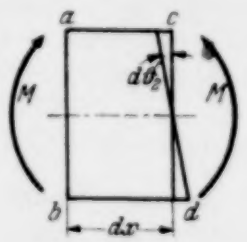


Abb. 6.

z. B. OA, sich im elastischen Zustand befinden, während die anderen, z. B. AB und BC, im elastisch-plastischen Zustand sind.

Für ein unendlich kleines Balkenelement (Abb. 6), das elastisch-plastisch beansprucht wird, ist der Drehwinkel des Querschnittes cd gegenüber ab

$$d\vartheta_2 = \frac{M\,dx}{E\,(J_e + Sz)} . \tag{5}$$

[1] Den Satz 2) hat Professor *J. Fritsche* [Z. angew. Math. Mech., 11 (1931), S. 176] auf einem anderen Weg bewiesen. Siehe auch *K. Hohenemser*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 472.

im Falle, daß die plastische Zone sich nur einerseits der Nullinie ausgebildet hat. Hierbei ist J_e das Trägheitsmoment der elastischen Zone in bezug auf die Nullachse, S die absolute Größe des statischen Momentes der plastischen Zone, bezogen auf die Nullachse, z der Abstand von der Nullachse bis zur Grenze zwischen der elastischen und der plastischen Zone.

Wenn die plastische Zone sich sowohl oberhalb als auch unterhalb des Querschnittes gebildet hat, so ist

$$d\vartheta_3 = \frac{M\,dx}{E\,[J_e + (S_0 + S_u)\,z]}\,, \tag{6}$$

wobei S_0 und S_u die absoluten Größen der statischen Momente der oberen und der unteren plastischen Zone in bezug auf die Nullachse sind. Für die elastischen Balkenabschnitte ist

$$d\vartheta_1 = \frac{M\,dx}{E\,J}\,.$$

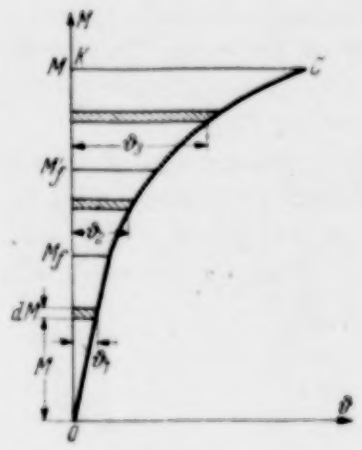


Abb. 7.

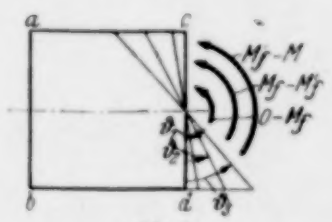


Abb. 7a.

Um die graphische Darstellung der Abhängigkeit zwischen dem Biegemoment M und dem entsprechenden Drehwinkel zu veranschaulichen, ersetzen wir dx durch 1. Dabei ist die Länge 1 genügend klein zu wählen. Dann lassen sich die letzten Formeln so darstellen:

$$\vartheta_1 = \frac{M \cdot 1}{E\,J}\,,$$

$$\vartheta_2 = \frac{M \cdot 1}{E\,(J_e + S\,z)}\,, \tag{5'}$$

$$\vartheta_3 = \frac{M \cdot 1}{E\,[J_e + (S_0 + S_u)\,z]}\,. \tag{6'}$$

Die Abhängigkeit $\vartheta = f(M)$ für den ganzen Formänderungsvorgang ist in Abb. 7 dargestellt.

Der Flächeninhalt OKC ist die gesamte innere Energie des Elementes. Hierbei ist M_f das Biegemoment, das dem Fließanfang auf der einen Seite der neutralen Achse entspricht. M_f' ist das etwas größere Moment, bei welchem das Fließen auch auf der anderen Seite beginnt.

Die gesamte Energie u_k des Elementes wird (Abb. 7a)

$$u_k = \int_0^{M_f} \vartheta_1\,d\,M + \int_{M_f}^{M_f'} \vartheta_2\,d\,M + \int_{M_f'}^{M} \vartheta_3\,d\,M\,.$$

Wenn wir wieder die Länge 1 durch dx ersetzen, so erhalten wir folgenden Ausdruck für die Energie dU_k eines unendlich kleinen Balkenelementes:

$$d\,U_k = \left[\int_0^{M_f} \frac{M\,d\,M}{E\,J} + \int_{M_f}^{M_f'} \frac{M\,d\,M}{E\,(J_e + S\,z)} + \int_{M_f'}^{M} \frac{M\,d\,M}{E\,[J_e + (S_0 + S_u)\,z]}\right] dx\,. \tag{7}$$

Die gesamte Energie U_k (Summe aus der elastischen Energie und der Energie der Restformänderungen) des ganzen Systems läßt sich so darstellen:

$$\left.\begin{aligned} U_k = \sum \int_{(l_i)} \frac{M^2\,dx}{2\,E\,J} + \sum \int_{(l_k')} \left[\int_0^{M_f} \frac{M\,d\,M}{E\,J} + \int_{M_f}^{M} \frac{M\,d\,M}{E\,(J_e + S\,z)}\right] dx + \\ + \sum \int_{(l_k)} \left[\int_0^{M_f} \frac{M\,d\,M}{E\,J} + \int_{M_f}^{M_f'} \frac{M\,d\,M}{E\,(J_e + S\,z)} + \int_{M_f'}^{M} \frac{M\,d\,M}{E\,[J_e + (S_0 + S_u)\,z]}\right] dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hierbei ist l_i die Länge eines der elastisch gebogenen Balkenabschnitte, l_k und l_k' diejenige eines elastisch-plastisch gebogenen. Wenn die plastische Zone nur an einer Seite entsteht, so

entfällt das dritte in Klammern stehende Integral in (7), und als obere Grenze des zweiten Integrals gilt M.

Für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt ist

$$\vartheta_1 = \frac{M \cdot 1}{EJ}, \qquad \vartheta_2 = \frac{M_f \cdot 1}{EJ \sqrt{3 - \frac{2M}{M_f}}}.$$

Die gesamte Energie des Systems ist

$$\left.\begin{aligned} U_k = \sum \int_{(l_i)} \int_0^M \frac{M\,dM}{EJ}\,dx + \sum \int_{(l_k)} \int_0^{M_f} \frac{M\,dM}{EJ}\,dx + \sum \int_{(l_k)} \int_{M_f}^M \frac{M_f\,dM}{EJ\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}}\,dx = \\ = \sum \int_{(l_i)} \frac{M^2\,dx}{2EJ} + \sum \int_{(l_k)} \frac{M_f^2}{2EJ}\left(3 - 2\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}\right)dx. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wobei $M_f = \frac{c\,h^2}{6}\sigma_s$ ist.

Wir wollen hierbei eine Eigenschaft der erhaltenen Funktionen U_k besonders unterstreichen. Die Ableitung dU_k/dP stellt die gesamte Verschiebung (elastische Verschiebung + Restverschiebung) des Angriffspunktes der Kraft in Richtung der Kraft dar. Wenn an der betreffenden Stelle keine Kraft vorhanden ist, so muß man eine entsprechende gedachte Kraft anbringen (oder ein gedachtes Moment, wenn der Drehwinkel gesucht wird).

Beispiel 1. Eine Konsole mit rechteckigem Querschnitt ist durch die gleichmäßige Belastung q beansprucht. Man ermittle die Durchbiegung δ und den Neigungswinkel ϑ der Tangente am Ende der Konsole. Man läßt an dem Konsolende eine gedachte Kraft P angreifen (Abb. 8). Benützt man den erweiterten Satz von *Castigliano* (2) und die Formel von *Leibniz* für den Differentialquotienten eines Integrals mit den von dem Parameter P abhängigen Grenzen, so ergibt sich

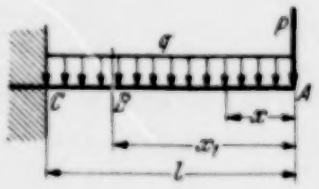


Abb. 8.

$$\left.\begin{aligned} \delta = \left(\frac{\partial U_k}{\partial P}\right)_{P=0} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^{x_1} M\frac{\partial M}{\partial P}\,dx + \int_{x_1}^{l} \frac{M_f \frac{\partial M}{\partial P}\,dx}{\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}} + \frac{1}{2}\left(\frac{dx_1}{dP}\right)(M^2)_{x=x_1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\frac{dx_1}{dP}\left[M_f^2\left(3 - 2\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}\right)\right]_{x=x_1}\right\}_{P=0}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wobei x_1 den Abstand vom Konsolende bis zum Beginn der elastisch-plastischen Zone BC, der aus der Gleichung $\frac{1}{2}qx_1^2 + Px_1 = M_f$ zu bestimmen ist, darstellt. Die beiden letzten Glieder in (10) heben sich gegenseitig auf, da, wenn $x = x_1$ ist, $M = M_f$ wird. Es ist bemerkenswert, daß die paarweise Aufhebung der Zusatzglieder bei Anwendung der *Leibniz*schen Formel in allen Fällen elastisch-plastischer Biegung stattfindet, da der Integrand in (9) immer den gleichen Wert an den Grenzen der elastisch-plastischen Bereiche hat. Wenn wir in (10) annehmen, daß $M = \frac{1}{2}qx^2 + Px$ ist, so erhalten wir nach Integration

$$\delta = \frac{M_f^2}{2qEJ}\left(3 - 2\sqrt{3-\frac{ql^2}{M_f}}\right). \tag{11}$$

Wenn wir im Querschnitt A statt P das gedachte Moment m anbringen und analog verfahren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = \left(\frac{\partial U_k}{\partial m}\right)_{m=0} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^{x_1} M\frac{\partial M}{\partial m}\,dx + \int_{x_1}^{l} \frac{M_f \frac{\partial M}{\partial m}\,dx}{\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}}}\right\}_{m=0} = \\ = \frac{M_f}{EJ}\sqrt{\frac{Mf}{q}}\left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \arcsin\left(l\sqrt{\frac{q}{3M_f}}\right) - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Bei der Grenzbelastung $q_s = 3\,M_f/l^2$, bei deren Wirkung der elastische Kern im Stützenquerschnitt verschwindet, wird

$$\delta_s = \frac{q_s l^4}{6\,E\,J}\,, \qquad \vartheta_s = 0{,}209\,\frac{q_s l^3}{E\,J}\,.$$

Beispiel 2. Eine Konsole (Abb. 9) wird durch das Moment m beansprucht. Man drückt m durch den Drehwinkel ϑ des Konsolendes aus. Für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt ist

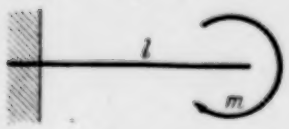


Abb. 9.

$$U = \sum_{(l_i)} \int \frac{M^2\,dx}{2\,E\,J} + \sum_{(l_k)} \int \frac{M_f^2}{2\,E\,J}\left(\sqrt{3 - \frac{2\,M}{M_f}} + \frac{3}{\sqrt{3 - \frac{2\,M}{M_f}}} - 3\right) dx\,.$$

Für den zu betrachtenden Fall der reinen Biegung ist

$$U = \frac{M_f^2\,l}{2\,E\,J}\left(\sqrt{3 - \frac{2\,m}{M_f}} + \frac{3}{\sqrt{3 - \frac{2\,m}{M_f}}} - 3\right). \tag{13}$$

und der Winkel

$$\vartheta = \frac{M_f l}{E\,J}\,\frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2\,m}{M_f}}}\,. \tag{14}$$

Wenn man m aus (13) mit Hilfe von (14) eliminiert, so erhält man

$$U = \frac{M_f^2\,l}{2\,E\,J}\left(\frac{M_f l}{\vartheta\,E\,J} + \frac{3\,\vartheta\,E\,J}{M_f l} - 3\right).$$

Hieraus folgt

$$m = \frac{\partial\,U}{\partial\,\vartheta} = \frac{M_f}{2}\left(3 - \frac{M_f^2\,l^2}{\vartheta^2\,E^2\,J^2}\right). \tag{15}$$

Allerdings könnte das letzte Ergebnis auch unmittelbar aus (14) gewonnen werden. Es ist leicht zu ersehen, daß zwischen U und m einerseits und ϑ andererseits im gegebenen Falle Zusammenhänge hyperbolischer Gestalt bestehen.

2. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, dieses allgemeinen Satzes der Mechanik, stellt sich in vielen Fällen auch nach dem Übergang des Systems in den elastisch-plastischen Zustand als sehr bequem heraus, wenn es sich um die Ermittlung der Formänderungen und der überzähligen Unbekannten in statisch unbestimmten Systemen handelt.

Abb. 10.

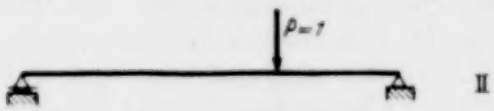


Abb. 10a.

Wir betrachten einen durch eine beliebige Belastung beanspruchten Balken (Abb. 10). Der Balkenquerschnitt hat nur eine Symmetrieachse, die in der Biegungsebene liegt. Für ein unendlich kleines Element des Balkens (Abb. 6), das sich in elastisch-plastischem Zustand befindet, drückt sich der Drehwinkel des Querschnitts cd gegen ab durch die Formel (5) oder (6) aus.

Zur Ermittlung der Durchbiegung δ in irgendeinem Querschnitt A stellen wir uns noch einen Zustand des Balkens vor, bei welchem er im Querschnitt A nur mit der Kraft $P_1 = 1$ belastet wird (Abb. 10a). Diesen Zustand wollen wir den zweiten Belastungszustand (System II) nennen, den tatsächlichen dagegen als den ersten Belastungszustand bezeichnen (System I).

Erteilen wir dem System II die Verschiebungen des Systems I und berechnen die dabei von der äußeren Kraft $P_1 = 1$ und den inneren Kräften geleistete Arbeit, so erhalten wir

$$1 \cdot \delta - \sum_{(l_i)} \int \frac{M_1\,M\,dx}{E\,J} - \sum_{(l_k')} \int \frac{M_1\,M\,dx}{E\,(J_e + S\,z)} - \sum_{(l_k)} \int \frac{M_1\,M\,dx}{E\,[J_e + (S_0 + S_a)\,z]} = 0\,, \tag{16}$$

wobei M_1 das Moment im beliebigen Querschnitt des zweiten Belastungszustandes ist. Wenn wir die Kraft P_1 durch ein Moment, das gleich 1 ist, ersetzen und analog verfahren, so können wir den Drehwinkel des Querschnittes A ermitteln.

Zur Bestimmung der überzähligen Unbekannten in einem beliebigen Stadium des elastisch-plastischen Vorganges in einem n-fach statisch unbestimmten System, z. B. in einem Durchlaufträger oder Rahmen, ist es notwendig, n Gleichungen folgender Art zusammenzustellen:

$$\sum \int_{(l_i)} \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E J} + \sum \int_{(l_k')} \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E (J_e + S z)} + \sum \int_{(l_k)} \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E [J_e + (S_0 + S_u) z]} = 0 . \tag{17}$$

wobei $M_1^{(n)}$ das Biegungsmoment ist, das durch die Krafteinheit hervorgerufen wird. Diese Kraft ersetzt die n-te überzählige Unbekannte für den n-ten gedachten Belastungszustand.

Die Integrale von den Formen

$$\int \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E (J_e + S z)} \qquad \text{oder} \qquad \int \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E [J_e + (S_0 + S_u) z]} \tag{18}$$

ersetzen in diesem Fall die bekannten Integrale des elastischen Zustandes

$$\int \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E J}$$

für die elastisch-plastisch beanspruchten Teile des Systems. Wenn die Elemente, aus welchen das System besteht, rechteckigen Querschnitt haben, so nimmt die Gleichung (17) folgende Form an:

$$\sum \int_{(l_i)} \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E J} \pm \sum \int_{(l_k)} \frac{M_1^{(n)} M_f\, dx}{E J \sqrt{3 \mp \frac{2 M}{M_f}}} = 0 . \tag{17'}$$

Für den Doppel-T-Querschnitt wird

$$\sum \int_{(l_i)} \frac{M_1^{(n)} M\, dx}{E J} \pm \sum \int_{(l'_k)} \frac{M_1^{(n)} M_f\, dx}{E J \sqrt{1 \mp \frac{M}{M'_s}\left(\cos \frac{\eta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\eta}{3}\right)}} \pm \sum \int_{(l_k)} \frac{M_1^{(n)} M_f\, dx}{E J \sqrt{A \mp \frac{2 M}{M'_f}}} = 0 . \tag{17''}$$

wobei l_k' die Länge eines der Systemabschnitte ist, in denen die plastische Zone sich nur in den Flanschen gebildet hat. Ferner ist l_k die Länge für den Fall, daß sich die plastische Zone sowohl in den Flanschen als auch im Steg befindet. In den Formeln (17′) und (17″) beziehen sich die oberen Vorzeichen auf die Abschnitte mit positiven Werten des Biegungsmomentes, die unteren aber auf diejenigen mit negativen.

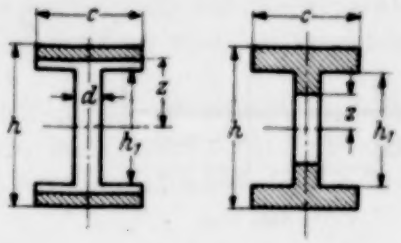


Abb. 10b.

Hierbei ist (Abb. 10b)

$$\eta = \arccos \frac{\frac{h_1^3}{8}\left(1 - \frac{d}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{c\, \sigma_s}\right)^3}} ,$$

$$M_f = \frac{2 J}{h} \sigma_s , \qquad M'_s = \frac{c h^2}{4} \sigma_s , \qquad M'_f = \frac{d h^2}{6} \sigma_s , \qquad A = 3\left[\frac{c}{d}\left(1 - \frac{h_1^2}{h^2}\right) + \frac{h_1^2}{h^2}\right] :$$

Beispiel 1. Eine Konsole wird durch eine dreieckige Belastung beansprucht (Abb. 11). Wir wollen die Durchbiegung δ und den Neigungswinkel ϑ ihres Endes ermitteln. Wenden wir Gleichung (16) sinngemäß auf diese Aufgabe an, so erhalten wir

$$\delta = \frac{1}{E J}\left(\int_0^{x_1} \frac{P x^4\, dx}{3 l^2} + \int_{x_1}^{l} \frac{M_f x\, dx}{\sqrt{3 - \frac{2 P x^3}{3 M_f l^2}}}\right) .$$

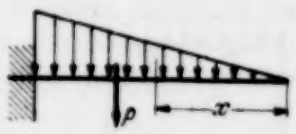


Abb. 11.

wobei $x_1 = \sqrt[3]{3 M_f l^2 / P}$ der Abstand vom freien Ende der Konsole bis zum Beginn des elastisch-plastischen Abschnittes ist.

Das zweite in der Klammer stehende Integral ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung. Es läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 M_f l^2}{2 P}}\left(1 - \sqrt{3}\, \mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)$$

in die Legendresche Normalform überführen.

Endgültig erhalten wir

$$\delta = \frac{M_f\, l}{E\,J}\sqrt[3]{\frac{M_f^2\, l}{P^2}}\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{5} + \frac{3\sqrt[12]{3}}{\sqrt[3]{4}}\left\{2\left[\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_2}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} - \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k)\right] + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\right]\right\}\right). \qquad (19)$$

Dabei ist

$$F(\varphi_1, k) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(\varphi_1\, k) = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi.$$

Der Modul des Integrals ist $k^2 = 0{,}933$. Die Amplituden sind

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt[6]{\frac{4}{243}}} = 30^0\,10'.$$

$$\varphi_2 = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{1 - l\sqrt[3]{\frac{2\,P}{9\,M_f\, l^2}}}\right).$$

Unter der Grenzbelastung $P_s = 4{,}5\,\frac{M_f}{l}$ wird die Durchbiegung

$$\delta_s = 0{,}127\,\frac{P_f\, l^3}{E\,J} = 0{,}0847\,\frac{P_s\, l^3}{E\,J}.$$

Wenn wir in Abb. 11a die Krafteinheit durch eine Momenteneinheit ersetzen und dem System II die Verschiebungen des Systems I erteilen, so ergibt sich

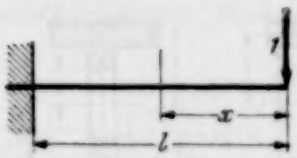


Abb. 11a.

$$\vartheta = \frac{1}{E\,J}\left(\int_0^{x_1} \frac{P\,x^3}{3\,l^2}\,dx + \int_{x_1} \frac{M_f\,dx}{\sqrt{3 - \frac{2\,P\,x^3}{3\,M_f\, l^2}}}\right)$$
$$= \frac{M_f}{E\,J}\sqrt[3]{\frac{M_f\, l^2}{2\,P}}\left\{\frac{\sqrt[3]{6}}{4} - \frac{1}{\sqrt[12]{3}}\left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)\right]\right\}, \qquad (20)$$

und

$$\vartheta_s = 0{,}102\,\frac{P_s\, l^2}{E\,J} = 0{,}153\,\frac{P_f\, l^2}{E\,J}.$$

Beispiel 2. Ein quadratischer Rahmen wird durch gleichmäßig verteilte Last beansprucht (Abb. 12). Das Moment in der Mitte des Riegels ist in diesem Falle größer als die Momente in den Knoten, und die plastischen Formänderungen entstehen zuerst im mittleren Teile des Riegels. Wir wollen annehmen, daß ein gewisser Abschnitt CD sich in elastisch-plastischem Zustand befindet, während die übrigen Rahmenteile in elastischem Zustand sind. Nach Gleichsetzung des Biegungsmomentes im Riegel mit dem Moment M_f erhält man die Abstände x_1 und x_2 vom Punkt A bis zu den Grenzen des elastisch-plastischen Bereichs

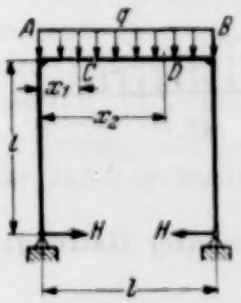


Abb. 12.

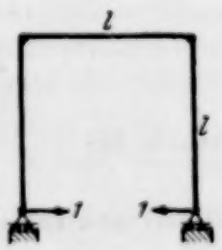


Abb. 12a.

$$x_{1,2} = \frac{l}{2} \mp \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2}{q}(H\,l + M_f)}.$$

Auf Grund der Bedingung (17′) erhält man für die zwei Belastungszustände des Systems (Abb. 12 und 12a) die Gleichung

$$\int_0^l H x^2\,dx + \int_0^{x_1}\left(H l - \frac{q l}{2}x + \frac{q x^2}{2}\right) l\,dx - \int_{x_1}^{l/2} \frac{M_f\, l\,dx}{\sqrt{3 - \frac{2}{M_f}\left(\frac{q l}{2}x - \frac{q x^2}{2} - Hl\right)}} = \frac{l^2}{6}\left(5H - \frac{q l}{4}\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2}{q}(Hl + M_f)}\left(\frac{q l^2}{12} - \frac{2}{3}Hl + \frac{M_f}{3}\right) - M_f\sqrt{\frac{M_f}{q}}\; ln \frac{\sqrt{3 + \frac{2Hl}{M_f} - \frac{q l^2}{4 M_f}}}{1 - \sqrt{\frac{q l^2}{4 M_f} - \frac{2Hl}{M_f}} - 2} = 0,$$

woraus der Horizontalschub H bestimmt werden kann.

3. Der Reziprozitätssatz. Bekanntlich ist dieser Satz auf die Voraussetzung gegründet, daß der Vorgang der Formänderung ideal-elastisch ist und daß die potentielle Formänderungsenergie infolgedessen eine homogene quadratische Funktion der äußeren Kräfte und der Verschiebungen ist. Für elastisch-plastische Deformationen kann dieser Satz daher keine Gültigkeit mehr besitzen.

Hiervon kann man sich auf Grund folgender einfacher Überlegungen überzeugen. Man stelle sich zwei Belastungszustände irgendeines Systems vor, z. B. eines an den Enden frei aufliegenden Balkens (Abb. 13 und 13a). In dem ersten ist der Balken durch die Kräfte P_d und P_k belastet, die die Bildung eines elastisch-plastischen Bereiches AB hervorgerufen haben. In dem zweiten ist er durch irgendwelche andere Kräfte P_m und P_n belastet, die elastisch-plastische Formänderungen in irgendeinem anderen Abschnitt CD hervorrufen. Vor dem Wirkungsbeginn der Kräfte befand sich der Balken in spannungslosem Zustand. Die den Angriffspunkten der Kräfte entsprechenden Verschiebungen bezeichnen wir mit δ_d, δ_k, δ_m und δ_n für den ersten Belastungszustand, und mit δ_d', δ_k', δ_m' und δ_n' für den zweiten. Bekanntlich ist bei elastischen Formänderungen

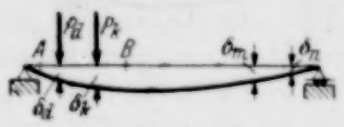


Abb. 13.

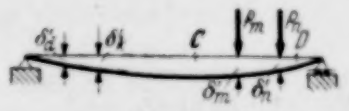


Abb. 13a.

$$P_d\,\delta_d' + P_k\,\delta_k' = P_m\,\delta_m + P_n\,\delta_n. \tag{21}$$

Nun wollen wir beweisen, daß bei elastisch-plastischen Formänderungen diese Bedingung nicht besteht, d. h. daß der Reziprozitätssatz hier nicht mehr gilt. Dazu bestimmen wir die gesamte Formänderungsarbeit bei der Belastung des Balkens mit sämtlichen Kräften und bei verschiedenen Belastungsanordnungen.

Zuerst nehmen wir an, daß der Balken allmählich durch die Wirkung der Kräfte P_d und P_k, die auch die auf Abb. 13 dargestellten Verschiebungen hervorrufen, beansprucht wird. Diesen schon elastisch-plastisch deformierten Balken belasten wir jetzt ebenfalls allmählich mit den Kräften P_m und P_n (Abb. 14).

Abb. 14.

Abb. 15.

Die Verschiebungen δ_m'', δ_n'', δ_d'' und δ_k'', die wir hierbei erhalten, werden natürlich verschieden von δ_m', δ_n', δ_d' und δ_k' sein. Wir setzen ferner voraus, daß bei gleichzeitigem Angreifen aller Kräfte die Tragfähigkeit des Balkens noch nicht vollständig erschöpft ist. Die gesamte Formänderungsarbeit ist

$$U_1 = \lambda_d P_d\,\delta_d + \lambda_k P_k\,\delta_k + \lambda_m'' P_m\,\delta_m'' + \lambda_n'' P_n''\,\delta_n'' + P_d\,\delta_d'' + P_k\,\delta_k'', \tag{22}$$

wobei λ_d, λ_m'', λ_k und λ_n'' die Koeffizienten sind, die an die Stelle von 1/2 (bei der ideal-elastischen Formänderung) treten.

Jetzt wenden wir eine andere Reihenfolge bei der Belastung des Balkens an. Zuerst lassen wir die Kräfte P_m und P_n und nachher erst P_d und P_k angreifen (Abb. 15). Dann ist die gesamte Formänderungsarbeit

$$U_2 = \lambda_m' P_m\,\delta_m' + \lambda_n' P_n\,\delta_n' + \lambda_d''' P_d\,\delta_d''' + \lambda_k''' P_k\,\delta_k''' + P_m\,\delta_m''' + P_n\,\delta_n'''. \tag{23}$$

Nur bei ideal-elastischem Vorgang, der dem *Hooke*schen Gesetz folgt, wenn also

$$\delta_d'' = \delta_{d'}\,,\quad \delta_d''' = \delta_d\,,\quad \delta_k'' = \delta_{k'}\,,\quad \delta_k''' = \delta_k\,,\quad \delta_m'' = \delta_{m'}\,,\quad \delta_m''' = \delta_m\,,\quad \delta_n'' = \delta_{n'}\,,\quad \delta_n''' = \delta_n$$

und alle Koeffizienten λ gleich 1/2 sind, kann man nach Gleichsetzung der rechten Seiten von (22) und (23) die Formel (21) erhalten.

Man betrachtet z. B. zwei Belastungszustände eines an den Enden freiaufliegenden Trägers, wobei er bei dem ersten Belastungszustand durch eine Last in der Mitte und bei dem zweiten durch ein Kräftepaar am rechten Ende beansprucht wird. Bilden wir den Ausdruck für die Arbeit der äußeren Kräfte des ersten Belastungszustandes unter Benutzung der Verschiebungen des zweiten und umgekehrt, so erhalten wir (Abb. 16)

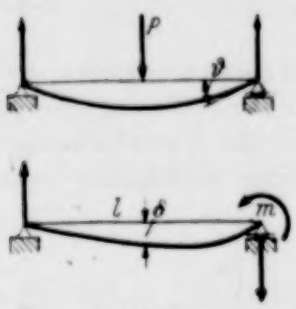


Abb. 16.

$$P\delta = \frac{P\,M_f^3\,l^2}{6\,m^2\,E\,J}\left[\frac{9\,m}{2\,M_f} - 5 + \sqrt{\left(3 - \frac{2\,m}{M_f}\right)^3}\,\right] - \frac{P\,m\,l^2}{48\,E\,J}\,,$$

$$m\,\vartheta = \frac{M_f^2\,m}{P\,E\,J}\left(3 - 2\sqrt{3 - \frac{P\,l}{2\,M_f}}\,\right).$$

Bei den Grenzwerten der Belastungen erhalten die letzten Gleichungen folgende Form:

$$P_s\,\delta_s = \frac{85}{1296}\,\frac{P_s\,m_s\,l^2}{E\,J}\,,\qquad m_s\,\vartheta_s = \frac{P_s\,m_s\,l^2}{12\,E\,J}\,.$$

Es ist offenbar, daß

$$P\delta \neq m\,\vartheta$$

ist.

(Eingegangen am 12. Mai 1947.)

Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten*.

Von **K. Wieghardt** in Göttingen.

1. Einleitung. Zur Berechnung laminarer Grenzschichten bei stationärer, ebener und inkompressibler Strömung sind in den letzten Jahren, besonders anläßlich des Lilienthal-Preisausschreibens 1940, mehrere Verfahren entwickelt worden. Diese lassen sich alle in zwei Gruppen einteilen, nämlich 1) die strengen Verfahren[1-6] und 2) die Näherungsverfahren[7-11], bei denen die Geschwindigkeitsprofile durch eine einparametrige Kurvenschar angenähert werden. Bei den strengen Verfahren wird die *Prandtl*sche Grenzschichtgleichung durch Reihenentwicklungen oder durch Differenzenmethoden integriert; die Genauigkeit kann, wenigstens theoretisch, beliebig gesteigert werden. Die Näherungsverfahren fußen dagegen auf der *Kármán*schen Impulsgleichung, angewandt auf eine einparametrige Klasse von Profilformen, also auf einer gewöhnlichen Differentialgleichung, und erfüllen damit die partielle Grenzschichtdifferentialgleichung nur im Mittel. Je nach der gewählten Profilklasse erhält man bei vorgegebenem Druckverlauf verschiedene Ergebnisse, deren Gültigkeit nur in speziellen Fällen durch Vergleichen mit der exakten Lösung geprüft werden kann. Trotzdem wird praktisch fast ausschließlich mit den letzten Verfahren gearbeitet, da diese nur einen kleinen Bruchteil des Arbeitsaufwandes der strengen Methoden benötigen.

Immerhin liefern diese eigentlich sehr groben Näherungsverfahren bereits halbwegs richtige Resultate wegen der geschickten „Mittelbildung", die zur Impulsgleichung führt. Die wichtigste physikalische Forderung: Befriedigung des Impulssatzes für die gesamte in der Reibungsschicht verzögerte Flüssigkeit wird nämlich auf diese Weise erfüllt. Dementsprechend ergibt sich auch gerade der Verlauf der Impulsdicke hierbei ziemlich richtig, während andere Grenzschichtgrößen, z. B. der Ablösepunkt oder die für Stabilitätsrechnungen benötigte zweite Ableitung des Profils oft sehr falsch werden.

Es erscheint daher aussichtsreich, diese Verfahren dadurch zu verfeinern, daß man noch eine zweite physikalisch wichtige Aussage, nämlich den Energiesatz, hinzunimmt und eine zweiparametrige Profilklasse zur Annäherung der Geschwindigkeitsverteilungen zugrunde legt. Denn es ist rein mathematisch offensichtlich eine bessere Annäherung an die exakten Lösungen möglich, wenn statt einer einparametrigen Profilklasse eine zweifach unendliche Kurvenschar benutzt wird. Aber auch vom physikalischen Standpunkt aus ist eine Verbesserung zu erwarten, wenn außer dem Impulssatz auch noch der Energiesatz für die ganze Reibungsschicht im Mittel erfüllt wird.

Im folgenden wird zunächst dieser neu hinzukommende Energiesatz abgeleitet, dann ein darauf begründetes Rechenverfahren dargestellt und an drei Beispielen erprobt.

2. Energiesatz für Reibungsschichten. Wir führen zunächst die üblichen Bezeichnungen ein: x = Bogenlänge der Körperkontur, y = Wandabstand, u, v = Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung, $U(x)$ = Geschwindigkeit in x-Richtung außerhalb der Grenzschicht, ϱ = Dichte,

---

* Habilitationsschrift, Göttingen 1945.

[1] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 77.

[2] *H. Görtler*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 129.

[3] *H. Görtler*, Ing.-Arch. 16 (1947), S. 173.

[4] *K. Schröder*, Ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. ZWB-Fo.-Ber. 1741 (1943).

[5] *L. Howarth*, Steady Flow in the Boundary Layer near the Surface of a Cylinder in a Stream. Rep. a. Mem. 1632 (1934).

[6] *L. Howarth*, Proc. Roy. Soc. London A. 164 (1938), p. 547.

[7] *K. Pohlhausen*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 252.

[8] *H. Holstein* und *T. Bohlen*, Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von *Pohlhausen* genügen. Lilienthal-Bericht S 10 (1941), S. 5.

[9] *H. Schlichting* und *A. Ulrich*, Zur Berechnung des Umschlages laminar/turbulent. Lilienthal-Bericht S 10 (1941), S. 75.

[10] *A. Walz*, Ein neuer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Reibungsschicht. Lilienthal-Bericht 141 (1941), S. 8.

[11] *Th. v. Kármán* und *C. B. Millikan*, On the Theory of Laminar Boundary Layers involving Separation. NACA-Rep. 504 (1934).

μ = Zähigkeit, $\nu = \mu/\varrho$ = kinematische Zähigkeit, $p(x)$ = statischer Druck. Nach der *Bernoulli*-gleichung gilt außerhalb der Reibungsschicht

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{d}{dx}\frac{\varrho}{2}U^2 = -\varrho\,U\,U',$$

wobei der Strich die Ableitung nach x bedeutet. An der Wand ist $\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ = Wandschubspannung.

Dann lautet die *Prandtl*sche Grenzschichtgleichung

$$\varrho\,u\frac{\partial u}{\partial x} + \varrho\,v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varrho\,U\,U' + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Als Randbedingung hat man zunächst

$$\text{für } y \to \infty: \quad u \to U \tag{3a}$$

und an der Körperkontur

$$\text{für } y = 0: \quad u = v = 0; \tag{3b}$$

damit folgt aus (1) sofort weiter

$$\text{für } y = 0: \quad \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{dp}{dx} = -\varrho\,U\,U' \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_0 = 0. \tag{3c}$$

Bei den einparametrigen Näherungsverfahren rechnet man statt mit der partiellen Differentialgleichung (1) mit einer gewöhnlichen, nämlich dem Impulssatz für Grenzschichten

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \varrho\,u\,(U-u)\,dy = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \frac{dp}{dx}\int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)_0 dy. \tag{4}$$

(Impulsverlust = Wandschubspannung + Druckkräfte).

Diese Gleichung kann aus (1) nach Addition von $\varrho\,u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$ durch Integration über y von 0 bis ∞ abgeleitet werden. Mit Hilfe der folgenden Längen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Verdrängungsdicke} \quad \delta_1 = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right) dy, \\ &\text{Impulsverlustdicke} \quad \delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right) dy \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und dem Verhältnis $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ kann man diesen Impulssatz auch schreiben:

$$\frac{\tau_0}{\varrho\,U^2} = \frac{\nu}{U^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \delta_2' + \delta_2(2+H_{12})\frac{U'}{U}. \tag{4a}$$

Für die Energie, die innerhalb der ganzen Grenzschicht durch die Wirkung der Zähigkeit in Wärme umgesetzt wird und so mechanisch verloren geht, folgt nun aus dem allgemeinen Energiesatz bei Berücksichtigung der üblichen Grenzschichtvernachlässigungen noch eine weitere gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \varrho\,u\left(\tfrac{1}{2}U^2 - \tfrac{1}{2}u^2\right) dy = \mu\int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \tag{6}$$

(Energiestromverlust je Längeneinheit = Dissipation in der Längeneinheit).

Diese Gleichung kann man ebenfalls leicht aus (1) ableiten, indem man nach Addition von $\frac{\varrho u}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$ erst noch mit u multipliziert und dann wieder über y von 0 bis ∞ integriert. Analog zu δ_1 und δ_2 definieren wir noch eine

$$\text{Energieverlustdicke} \quad \delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left[1-\left(\frac{u}{U}\right)^2\right] dy, \tag{7}$$

und $H_{32} = \delta_3/\delta_2$ sowie als dimensionslose Größe an Stelle der Dissipationsfunktion

$$D^* = \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial\,(y/\delta_2)}\left(\frac{u}{U}\right)\right]^2 d\left(\frac{y}{\delta_2}\right). \tag{7a}$$

Dann können wir (6) auch kürzer schreiben:

$$D^* = \frac{1}{2}\,\frac{\delta_2}{\nu U^2}\,\frac{d}{dx}\,(U^3\delta_3)\,. \tag{8}$$

Eine solche Energiegleichung besteht übrigens auch für turbulente Reibungsschichten, nur daß dort für die Dissipation statt $\mu\int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$ zu schreiben ist:

$$\int_0^\infty \tau\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dy = -\int_0^\infty \frac{\partial \tau}{\partial y}\,u\,dy\,, \tag{9}$$

wo τ jetzt die turbulente Schubspannung bedeutet. Solange jedoch ein allgemeiner Ansatz für τ fehlt, hilft hier Gleichung (6) auch nicht weiter, da zwei neue Größen, die Arbeit der Schubspannungen und die Energieverlustdicke, durch eine neue Gleichung eingeführt werden.

Rein rechnerisch könnte man aus (1) auch noch beliebig weitere Gleichungen wie (4) und (6) ableiten, z. B. durch Multiplikation mit u^n und Integration über y, und so die partielle Differentialgleichung (1) durch ein System gewöhnlicher ersetzen. Physikalisch anschauliche Aussagen ergeben allerdings nur die ersten zwei Gleichungen mit $n=0$ und $n=1$, nämlich die Impuls- und die Energiegleichung.

3. Das Rechenverfahren. Wenn man statt der Grenzschichtgleichung (1) nur die beiden durch Mittelung erhaltenen gewöhnlichen Differentialgleichungen (4) und (6) erfüllen will, muß man für jedes Geschwindigkeitsprofil zwei Parameter freihalten, die eben erst aus diesen beiden Gleichungen berechnet werden sollen. Welche Größen man als Parameter einführt, steht zunächst frei und ist auch unabhängig von der Wahl der Profilklasse. Als erster Parameter ist, wie in mehreren Arbeiten des Lilienthal-Preisausschreibens 1940 gleichzeitig gefunden wurde, besonders zweckmäßig die Größe

$$\lambda^* = U'\frac{\delta_2^2}{\nu} = U' z^*, \text{ mit } z^* = \frac{\delta_2^2}{\nu} \text{ und } z^{*\prime} = 2\,\frac{\delta_2\delta_2'}{\nu}\,. \tag{10}$$

Als zweiten Parameter benutzen wir die dimensionslose Wandtangente

$$\varepsilon = \frac{\delta_2}{U}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{U\delta_2}{\nu}\,\frac{\tau_0}{\varrho U^2}\,. \tag{11}$$

Aus dieser Größe kann nämlich der praktisch interessierende Reibungswiderstand und vor allem die Ablösestelle der laminaren Grenzschicht, wo $(\partial u/\partial y)_0 = 0$ wird, leicht ermittelt werden. Mit diesen beiden Parametern lassen sich die Gleichungen (4a) und (6a) umformen zu

$$U z^{*\prime} = 2\,\varepsilon - 2(2 + H_{12})\,\lambda^* = F_1(\lambda^*, \varepsilon)\,, \tag{4b}$$

$$U z^*\,H_{32}' = 2\,D^* - [\varepsilon - (H_{12} - 1)\,\lambda^*]\,H_{32} = F_2(\lambda^*, \varepsilon);\; H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}\,. \tag{6b}$$

Nachdem für eine bestimmte Profilklasse $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ und D^* nach den Definitionen (5), (7) und (6a) sowie daraus nach (4b) und (6b) die Funktionen F_1 und F_2 einmal berechnet worden sind, geht das Rechenverfahren folgendermaßen vor sich. Gegeben seien ein Anfangsprofil an der Stelle x_0 und der Verlauf der Außengeschwindigkeit abhängig von der Bogenlänge $U(x)$. Für das Ausgangsprofil, das noch genügend genau durch eines der zweiparametrigen Profile angenähert werde, ist δ_2 und ε zu bestimmen. Daraus folgen dann z^*, λ^* und aus Tabellen $H_{32}(\lambda^*, \varepsilon)$ sowie $F_1(\lambda^*, \varepsilon)$ und $F_2(\lambda^*, \varepsilon)$. Die Weiterentwicklung des Profils ist dann durch (4b) und (6b) gegeben: $z^{*\prime} = F_1/U$ und $H'_{32} = F_2/Uz^*$. Geht man nun um eine passende Schrittlänge $\triangle x$ längs der Körperkontur weiter, so wird an der Stelle $x_1 = x_0 + \triangle x$: $z_1^* = z_0^* + z^{*\prime}\cdot\triangle x$ und $(H_{32})_1 = (H_{32})_0 + H'_{32}\cdot\triangle x$. Aus z_1^* ergibt sich λ_1^*; damit wird aus der Tabelle für H_{32} das zu λ_1^* und $(H_{32})_1$ gehörige ε_1 gefunden, womit jetzt das Profil bei x_1 bestimmt ist usw. Um unnötig kleine Schrittlängen zu vermeiden, rechnet man zweckmäßig mit „überspringenden Differenzen", indem man $z^{*\prime}$ und H'_{32} rechnerisch oder graphisch für $x_\nu + \frac{1}{2}\triangle x$ extrapoliert. (Bei sehr großer Schrittlänge $\triangle x$ kann es vorkommen, daß z. B. die H'_{32}-Werte bei $x_{\nu-1}$, x_ν und der neu berechnete Wert bei $x_{\nu+1}$ keine genügend glatte Kurve bilden; in diesem Fall muß der Schritt mit einem anderen extrapolierten Wert H'_{32} bei $x_\nu + \frac{1}{2}\triangle x$ wiederholt werden.)

Nachdem $\lambda^*(x)$ und $\varepsilon(x)$ bekannt sind, können dann die jeweils interessierenden Größen δ_1, δ_2 usw. aus Tabellen entnommen oder leicht berechnet werden. Ebenso können nachträglich auch die zu y^* und ε gehörigen Geschwindigkeitsprofile selbst ermittelt werden. Die Stelle, an der die Grenzschicht sich ablöst, ergibt sich einfach dort, wo $\varepsilon(x)$ verschwindet.

Die Gleichungen (4b) und (6b) könnten auch umgeschrieben werden zu

$$\frac{d}{dx}(Uz^*)=\lambda^*+F_1=F_3(\lambda^*,\varepsilon)\,. \tag{4c}$$

$$\frac{d}{dx}(Uz^*H_{32})=(\lambda^*+F_1)H_{32}+F_2=F_4(\lambda^*,\varepsilon)\,. \tag{6c}$$

Jedoch würde sich nach diesen Gleichungen das neue $(H_{32})_{\nu+1}$ an der Stelle $x_{\nu+1}$ als Quotient ergeben, statt als Summe $(H_{32})_\nu+H'_{32}\cdot\triangle x$; dies ist rechnerisch aber unvorteilhaft, da sich H_{32} nur sehr wenig ändert und deshalb sehr genau zu berechnen ist (H_{32} ist immer nur wenig größer als 1,5).

4. Die spezielle, zweiparametrige Profilklasse. Bei der Wahl der Profilklasse wird man versuchen, möglichst viele Randbedingungen der Gleichung (1) von vornherein zu erfüllen und das asymptotische Verhalten der strengen Lösungen für $y\to\infty$ möglichst richtig wiederzugeben. Einen Ansatz, der diesen Anforderungen besonders gerecht wird, hat *W. Mangler*[1] gegeben: die darin vorkommenden Funktionen sind jedoch für den vorliegenden Zweck rechnerisch zu kompliziert. Ein anderer Ansatz stammt von *A. Walz*[2], der mehrere exakte Geschwindigkeitsprofile besonders gut annähert; für eine Erweiterung auf eine zweiparametrige Kurvenschar scheint dieser Ansatz aber zu undurchsichtig.

Rechnerisch am handlichsten ist eine Erweiterung des ursprünglichen *Pohlhausen*-Verfahrens[3], also ein Polynomansatz. *K. Pohlhausen* benutzte ein Polynom vierten Grades: P_4; bessere Annäherung an bekannte exakte Profile erhielt *H. Schlichting*[4] durch Erfüllung von zwei Randbedingungen mehr mit einem einparametrigen Polynom sechsten Grades: P_6. Allerdings haben diese Polynomansätze zwei Nachteile. Erstens wird dabei von einem endlichen Wandabstand $y=\delta=$ Grenzschichtdicke ab $u=U$ gesetzt, während bei exakten Lösungen von (1) u sich nur asymptotisch U nähert. Aber da die Asymptote praktisch sehr bald erreicht wird, ist die Einführung von δ physikalisch durchaus zulässig. Mathematisch stellt sie insofern einen Umweg dar, als nachher im eigentlichen Rechenverfahren nur mit der Impulsdicke gerechnet wird; die künstlich eingeführte Grenzschichtdicke δ muß also nachträglich wieder beseitigt werden.

Ein zweiter wesentlicherer Nachteil der Ansätze mit Polynomen höheren Grades ist der, daß sie je nach den einmal festgelegten Randbedingungen unter Umständen bei stärkerem Druckabfall versagen. So versagt z. B. das P_6-Verfahren von *Schlichting* im Staupunkt, während das *Pohlhausen*sche P_4-Verfahren, das zwei Randbedingungen weniger erfüllt, dort noch funktioniert. Es stellte sich nun heraus, daß auch entsprechende zweiparametrige Polynomansätze bei Druckabfall meist unbrauchbar sind. Andererseits funktionieren gerade dort im Gebiet des Druckabfalls die einparametrigen Verfahren gut, so daß man vom Staupunkt ab zunächst etwa nach *Walz*[5,6] rechnen kann, und erst von einer gewissen Bogenlänge ab – je nachdem, wie stark sich $U(x)$ ändert – auf das zweiparametrige Verfahren überzugehen braucht. Aus der *Walz*schen Arbeit[7] (Abb. 4) oder unserer Abb. 5 ist besonders deutlich zu ersehen, daß man bei Druckabfall wohl mit einem Parameter auskommt, bei Druckanstieg, also vor allem zur Bestimmung der Ablösung, aber sicher nicht mehr.

Wir setzten also zunächst für die Profile u/U ein Polynom siebenten Grades mit zwei Parametern $P_7^{(2)}$ an, das dieselben Randbedingungen wie das P_6 von *Schlichting* erfüllte, nämlich die für die drei ersten Ableitungen an der Wand und am Rand der Grenzschicht. Mit diesem Ansatz ergab das Verfahren nach **3** zwar z. B. für die *Howarth*-Strömung $U=u_0-u_1x$ sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung, dagegen versagte es schon beim Kreiszylinder. Rechnete man nämlich etwa bis zum Druckminimum nach *Walz* und begann dort mit dem $P_7^{(2)}$-Verfahren, so erhielt man nach wenigen Schritten bereits Werte für die Funktionen F_1, F_2 und H_{32} nach (4b) und (6b), für die kein physikalisch sinnvolles Polynom $P_7^{(2)}$ existierte.

Inzwischen erschien eine Untersuchung über einparametrige Polynomansätze von *W. Mangler*[8]. Danach eignen sich je nach der Anzahl der erfüllten Randbedingungen für Druckabfall und

[1] *W. Mangler*, Ein Verfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht. Lilienthal-Bericht S 10 (1941), S. 28.
[2] Siehe Fußnote 11 von S. 231.
[3] Siehe Fußnote 8 von S. 231.
[4] Siehe Fußnote 10 von S. 231.
[5] Siehe Fußnote 11 von S. 231.
[6] *A. Walz*, Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht. Um 3060 (1943).
[7] Siehe Fußnote 11 von S. 231, Abb. 4.
[8] *W. Mangler*, Z. angew. Math. Mech. 24 (1944), S. 251.

-anstieg verschiedene Polynome; ferner ist es wesentlich, ob an der Wand oder am Rand der Grenzschicht mehr Randbedingungen erfüllt werden[1]. Um nun mit dem zweiparametrigen Verfahren einen möglichst großen Bereich gut wiedergeben zu können, setzen wir daher an Stelle von $P_7^{(2)}$ folgendes Polynom elften Grades $P_{11}^{(2)}$ an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{U} &= 1-(1-\eta)^8\,(1+A_1\,\eta+ \\ &+A_2\,\eta^2+A_3\,\eta^3) \text{ mit } \eta=\frac{y}{\delta}\,. \end{aligned}\right| \quad (12)$$

Am Rand der Grenzschicht für $\eta=1$ verschwinden dann die ersten sieben Ableitungen $\frac{\partial^\nu u/U}{\partial\,\eta^\nu}$ für $\nu \leqq 7$ stets. Die Koeffizienten A_1, A_2 und A_3 folgen aus den ersten drei Randbedingungen an der Wand:

für $y=0$:

$$\left(\frac{\partial\,u}{\partial\,y}\right)_0 = \frac{U}{\delta}\,a = \frac{U}{\delta_2}\,\varepsilon\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\,y^2}\right)_0 = -\frac{U}{\delta^2}\,2\,b = -\frac{U}{\delta_2^2}\,\lambda^*\,,$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\,y^3}\right)_0 = 0\,,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -a+8\,, \\ A_2 &= b-8a+36\,, \\ A_3 &= 8b-36a+120\,. \end{aligned}\right| \quad (13)$$

In (12) eingesetzt ergibt das

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{U} &= f_1+af_2+bf_3\,, \\ &\text{mit} \\ f_1 &= 1-(1-\eta)^8(1+ \\ &\quad +8\,\eta+36\,\eta^2+120\,\eta^3)\,, \\ f_2 &= (1-\eta)^8\,\eta\,(1+8\,\eta+36\,\eta^2)\,, \\ f_3 &= -(1-\eta)^8\,\eta^2(1+8\,\eta)\,. \end{aligned}\right| \quad (14)$$

Diese Funktionen sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen sind in Abb. 1, 2 und 3 wiedergegeben. Ferner sind einige Beispiele dieser Profilklasse in Abb. 4 gezeichnet.

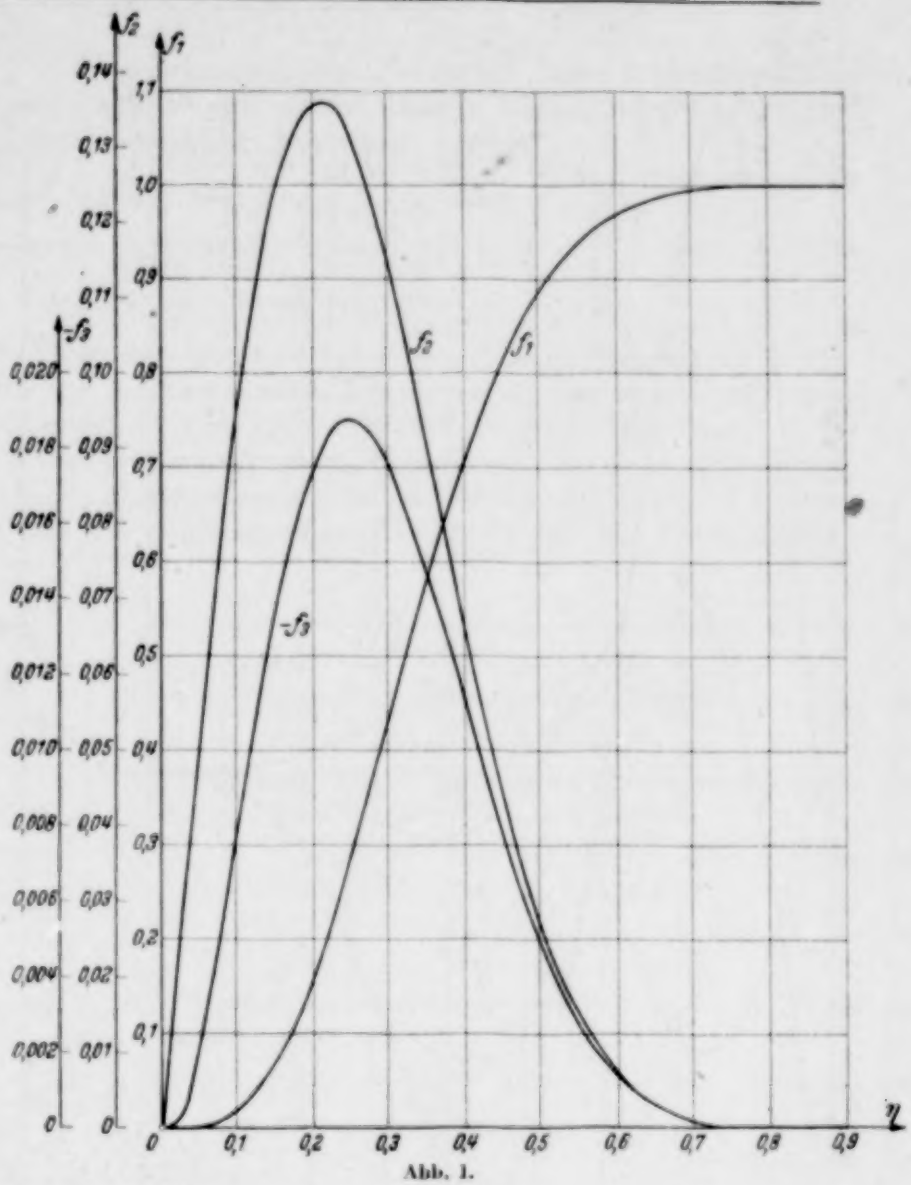


Abb. 1.

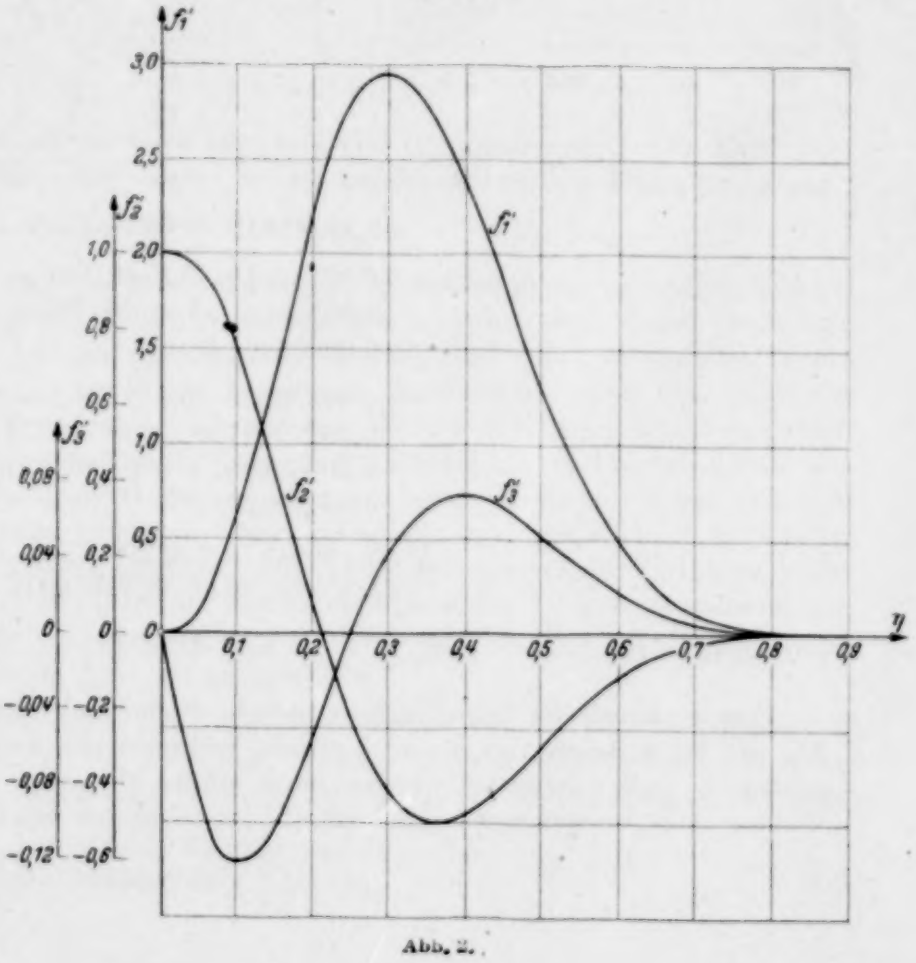


Abb. 2.

[1] *H. Schuh.* Zur Theorie der Ölkühler: Berechnung des Wärmeübergangs bei laminarer Strömung zäher Flüssigkeiten. Lufo-Jahrbuch 1944.

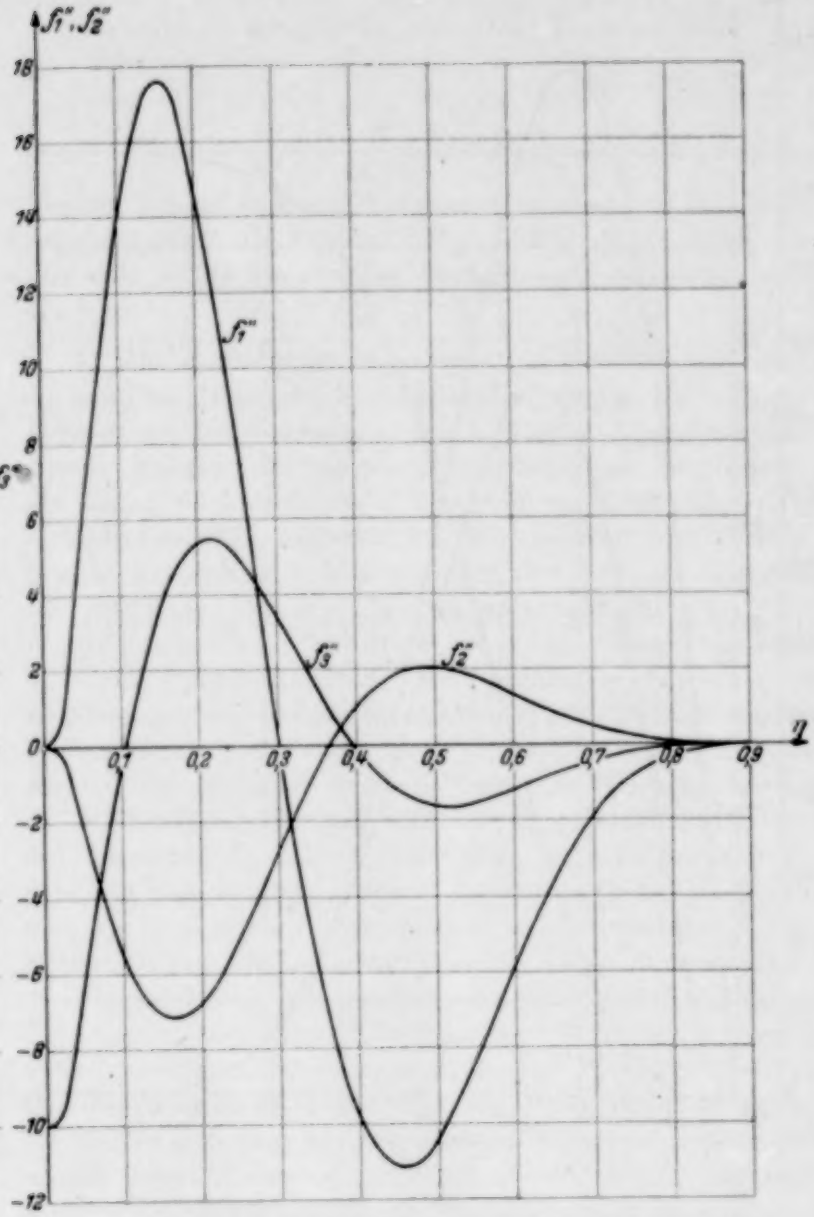


Abb. 3.

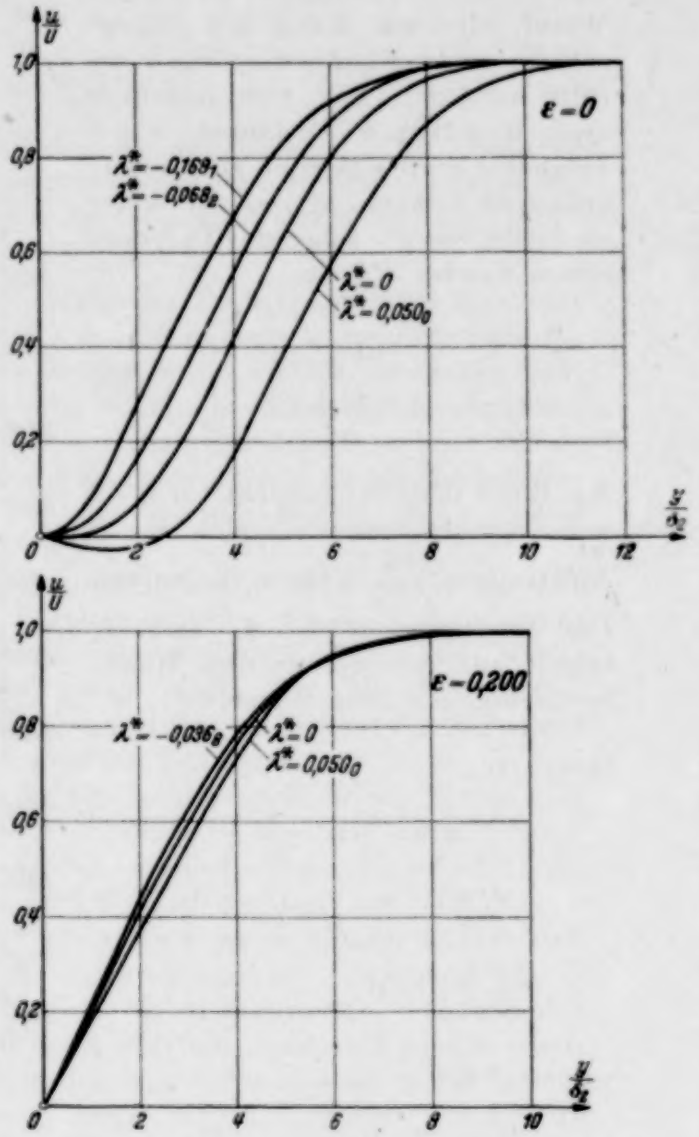


Abb. 4.

Nach den Definitionen (5), (7) und (6a) wird für diese Profile, wobei hier statt bis $y \to \infty$ bis $y = \delta$, also $\eta = 1$, zu integrieren ist,

$$\delta_1/\delta = 0{,}33333333 - 0{,}04545455\, a + 0{,}00606061\, b\,. \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\delta_2/\delta = \varepsilon/a = {} & 0{,}07403419 + 0{,}01491901\, a - 0{,}00118583\, b \\ & - 0{,}00454811\, a^2 + 0{,}00120011\, ab \\ & - 0{,}00008286\, b^2\,,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\delta_3/\delta = {} & 0{,}11358582 + 0{,}01917976\, a - 0{,}00166115\, b \\ & - 0{,}00379997\, a^2 + 0{,}00115574\, ab - 0{,}00008902\, b^2 \\ & - 0{,}000512067\, a^3 + 0{,}000202363\, a^2 b - 0{,}000027557\, ab^2 \\ & + 0{,}000001283\, b^3\,,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}D = {} & 2{,}1406457 - 0{,}43299425\, a + 0{,}03567743\, b \\ & + 0{,}15922158\, a^2 - 0{,}03670942\, ab + 0{,}00277164\, b^2\,.\end{aligned} \tag{18}$$

und daraus $H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta}\frac{a}{\varepsilon}$, $H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta}\frac{a}{\varepsilon}$ und $D^* = D\frac{\varepsilon}{a}$.

Eine rechnerische Schwierigkeit besteht darin, daß man mit den obigen Formeln F_1, F_2 und H_{32} als Funktionen von a und b erhält, während zur Anwendung Tabellen mit den Eingangsgrößen λ^* und ε benötigt werden; man müßte also noch eine mühevolle Interpolation in zwei Dimensionen vornehmen. Andererseits ist es wegen des komplizierten Zusammenhangs

$$\lambda^* = \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right)^2 2b \quad \text{und} \quad \varepsilon = \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right) a \tag{19}$$

unmöglich, δ_1/δ nsw. abhängig von λ^* und ε aufzuschreiben. Es mußte daher folgendermaßen vorgegangen werden: Aus (19) und (16) kann λ^* und daraus dann b bei festgehaltenem ε für verschiedene a aus einer quadratischen Gleichung bestimmt werden:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^* = \frac{\varepsilon^2}{2Aa^2}\left(B \mp \sqrt{B^2 + 4AC}\right) \text{ und } b = \frac{\lambda^*}{2}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2, \text{ mit} \\ &A = 2{,}07156 \cdot 10^{-5}, \quad B = (-5{,}92915 + 6{,}00053\, a) \cdot 10^{-4}, \\ &C = 0{,}07403419 + 0{,}01491901\, a - 0{,}00454811\, a^2 - \varepsilon/a\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

So können z. B. für $\varepsilon = 0{,}20$ durch graphische Interpolation von λ^* ($\varepsilon = 0{,}20$, a) diejenigen a-Werte gefunden werden, für die $\lambda^* = 0, \pm 0{,}05, \pm 0{,}10$ usw. wird. Mit diesen a- und den zugehörigen b-Werten wurde dann nach den Gleichungen (15) bis (18), (4b), (6b) F_1 usw. berechnet.

Das Endergebnis dieser sehr langwierigen numerischen Rechnungen ist in ausführlichen Zahlentafeln $F_1(\lambda^*, \varepsilon)$, $F_2(\lambda^*, \varepsilon)$ und $H_{32}(\lambda^*, \varepsilon)$ zusammengefaßt[1]. Damit hat man nun die Grundlage für das in **3** beschriebene Verfahren bei dem speziellen $P_{11}^{(2)}$-Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil.

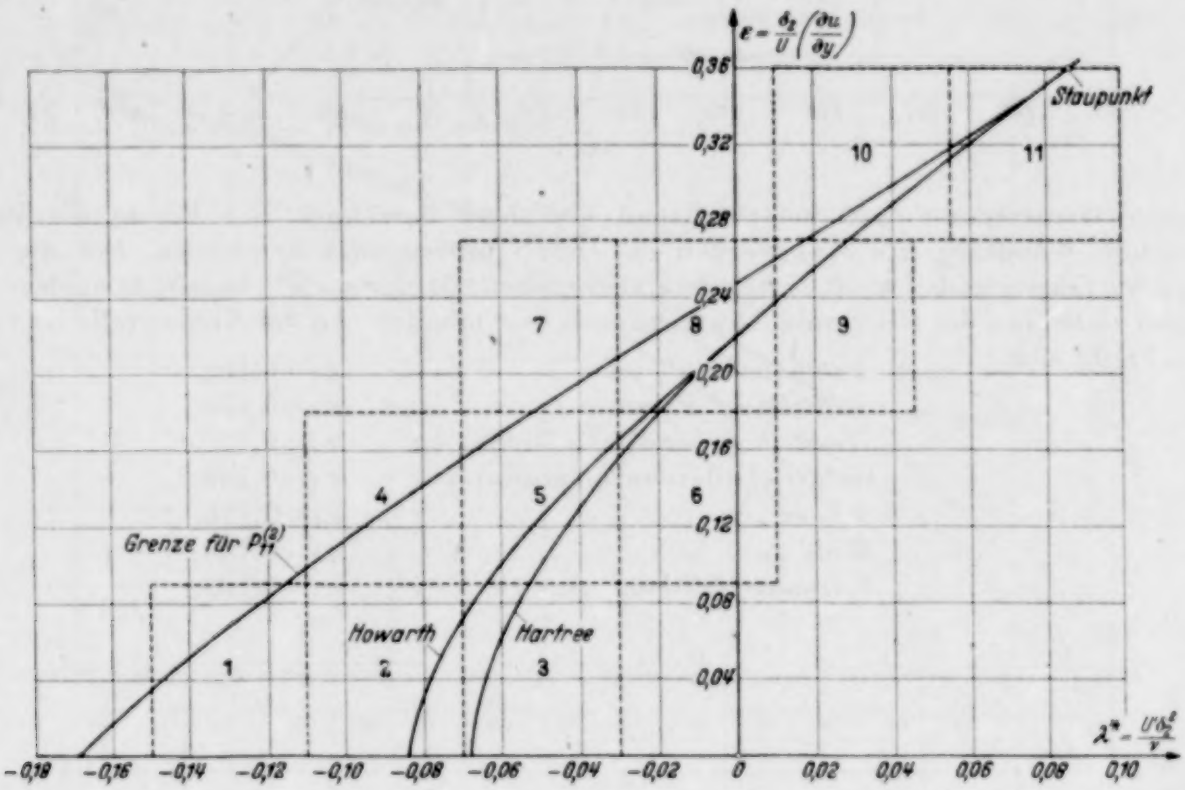


Abb. 5.[1]

Wie oben schon erwähnt, gibt es nicht zu jedem beliebigen λ^*, ε-Wertepaar physikalisch sinnvolle Profile, sondern nur in einem gewissen (λ^*, ε)-Gebiet, das in Abb. 5 durch eine Grenzlinie nach kleinen λ^*-Werten abgegrenzt ist. Als physikalisch sinnvoll sind dabei nur solche Profile zu betrachten, bei denen u/U monoton von 0 bis 1 ansteigt; insbesondere darf u/U nicht für $\eta < 1$ größer als 1 werden und erst bei $\eta \to 1$ wieder auf den Wert 1 abfallen. Die Grenze nach großen λ^*-Werten bei festem ε ist praktisch ohne Bedeutung; der tabulierte Bereich dürfte zur Berechnung von nicht ganz ausgefallenen Grenzschichten genügen. Ebenso wie bei den einparametrigen Polynomen gibt es auch hier eine obere ε-Grenze: $\varepsilon_{max} = 0{,}3711$; d. h. Grenzschichten mit starkem Druckabfall können auch mit diesem zweiparametrigen Verfahren nicht berechnet werden. In Abb. 5 sind die Bereiche der einzelnen Tafeln für F_1 usw. gestrichelt angegeben. Ferner sind zwei Kurven $\varepsilon(\lambda^*)$ eingezeichnet, die den exakten Profilen von *D. R. Hartree* ($U \sim x^{\pm m}$)[2] und von *L. Howarth* ($U = u_0 \pm u_1 x$)[3] entsprechen.

5. Beispiele. a) Howarth-Strömung $U = u_0 - u_1 x$. Wir machen mit der Geschwindigkeit u_0 und der Länge u_0/u_1 dimensionslos, so daß $U = 1 - x$ wird. Dann ist nach der *Howarth*schen exakten Lösung bei $x = 0{,}05$: $\delta_2 = 0{,}162$, $\lambda^* = -0{,}0262$ und $\varepsilon = 0{,}1724$. Von diesem Profil ausgehend wurde

[1] Lichtpausen dieser Tafeln können vom Verfasser bezogen werden.
[2] *D. R. Hartree*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 33 (1937).
[3] Siehe Fußnote 7 von S. 231.

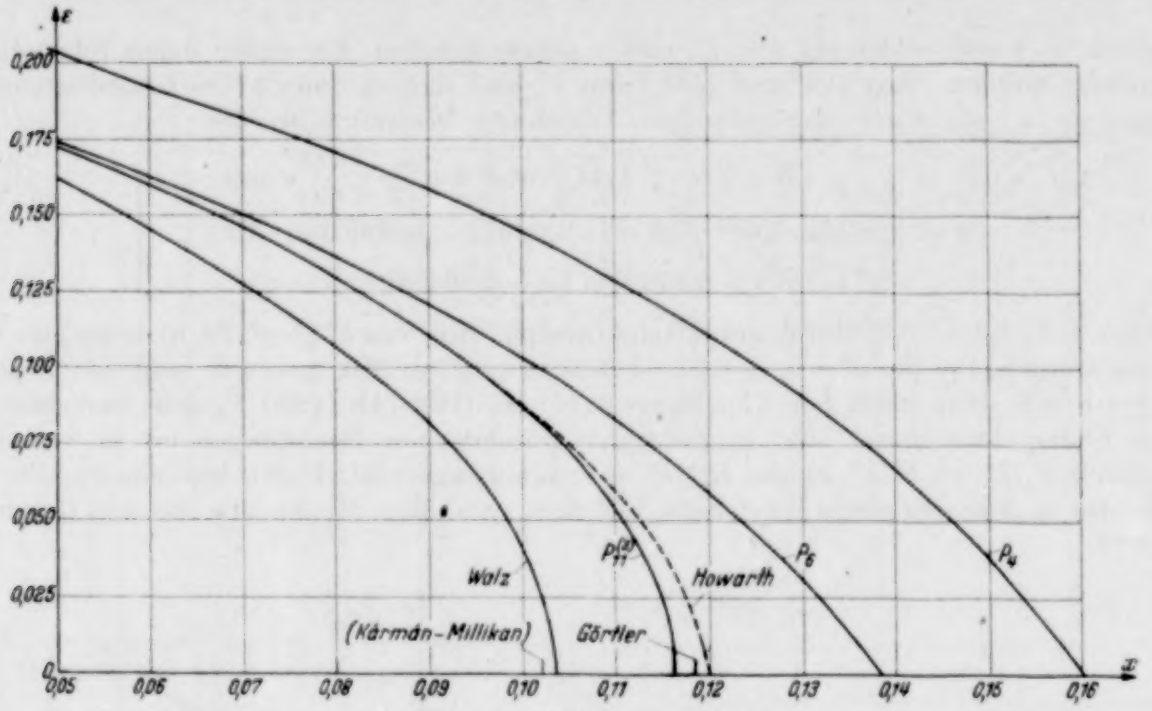


Abb. 6.

die weitere Grenzschicht nach verschiedenen Verfahren berechnet. Die Ergebnisse für die dimensionslose Wandtangente $\varepsilon(x)$ werden in Abb. 6 miteinander verglichen. Für die einparametrigen Verfahren ist bei $x=0{,}05\ \delta_2$ allein vorgegeben; da dann $\varepsilon(\lambda^*)$ bereits festgelegt ist, sind hier schon zu Beginn der Rechnung Abweichungen in ε möglich. An der Ablösestelle ist $\varepsilon=0$; ihre Lage x_A ergibt sich

nach *Pohlhausen* P_4 zu . . . . . $x_A=0{,}160$,
„ *Schlichting* P_6 zu . . . . . $x_A=0{,}138$,
„ *Howarth* (unendliche Reihe) zu . $x_A=0{,}120$,
„ *Görtler* (Differenzverfahren) zu . $x_A=0{,}118$,
„ $P_{11}^{(2)}$ zu . . . . . $x_A=0{,}116$,
„ *Walz* zu . . . . . $x_A=0{,}103$,
„ *Kármán-Millikan*[1] zu . . . . . $x_A=0{,}102$.

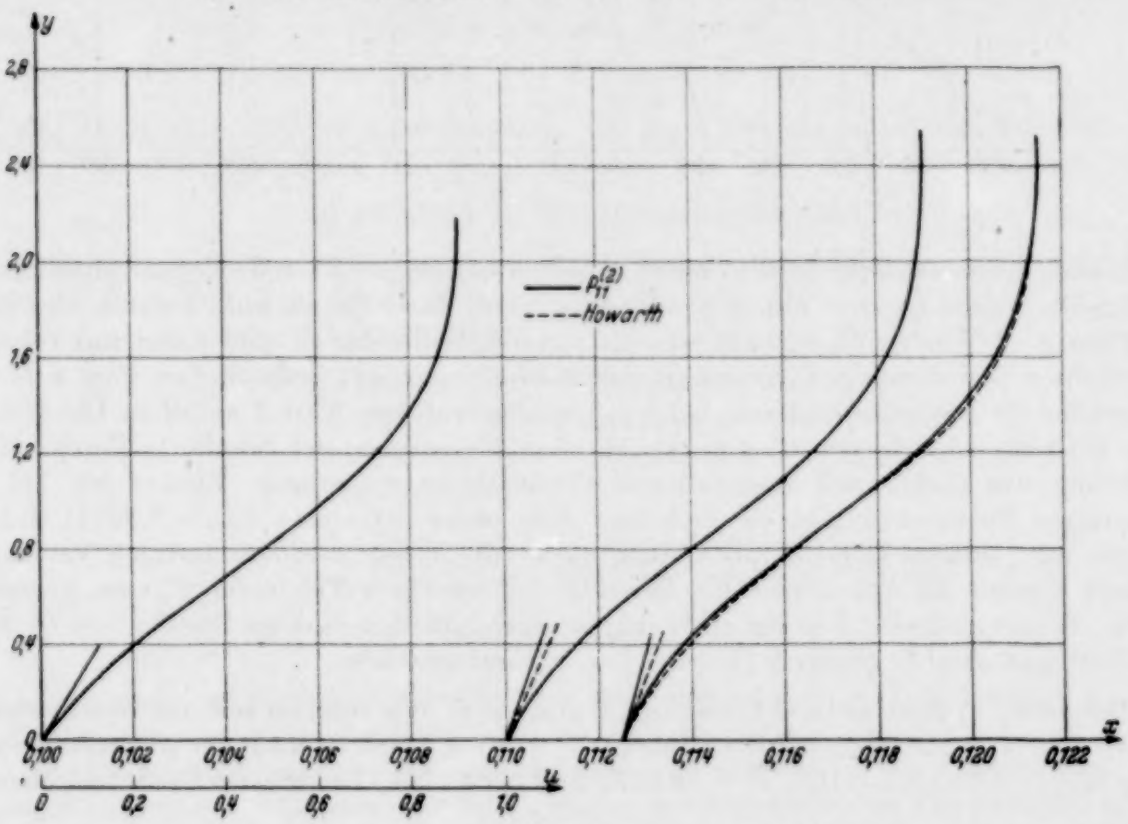


Abb. 7.

[1] Siehe Fußnote 12 von S. 231.

Der hier verhältnismäßig große Fehler der Rechnung nach *Walz* erklärt sich daraus, daß dabei *Hartree*-Profile zugrundegelegt sind; würde man den $\varepsilon(\lambda^*)$-Verlauf nach *Howarth* (vgl. Abb. 5) benutzen, so ergäbe sich natürlich völlige Übereinstimmung.

Das $\varepsilon(x)$ nach dem neuen Verfahren (Schrittlänge $\triangle x = 0{,}01$) weicht nach Abb. 6 erst für $x > 0{,}10$ von den *Howarth*schen Werten etwas ab. Dabei ist noch zu beachten, daß *Howarth* von $x = 0{,}0875$ ab nach einem Näherungsverfahren extrapolieren mußte, da dort in der Nähe der Ablösungsstelle die Konvergenz seiner Lösungsreihe schlechter wird. Auch das *Görtler*sche Differenzenverfahren ergab ein kleineres x_A als nach *Howarth*. In Abb. 7 werden schließlich einige Geschwindigkeitsprofile mit denen von *Howarth* verglichen: Es ergeben sich hier erst in unmittelbarer Nähe der Ablösung erkennbare Unterschiede.

b) Kreiszylinder. Da wir hier mit den Ergebnissen zweier Arbeiten von *Görtler*[1] vergleichen wollen, die wohl die genaueste Lösung für die von *Hiemenz* gemessene Druckverteilung ergeben, schließen wir uns *Görtlers* Dimensionslosmachung an. Dann wird $U = x - 6{,}289 \cdot 10^{-3}\, x^3 - 4{,}615 \cdot 10^{-5}\, x^5$ und die Bogenlänge $x = a/11{,}75$ mit a = Zentriwinkel. Der Verlauf der Wand-

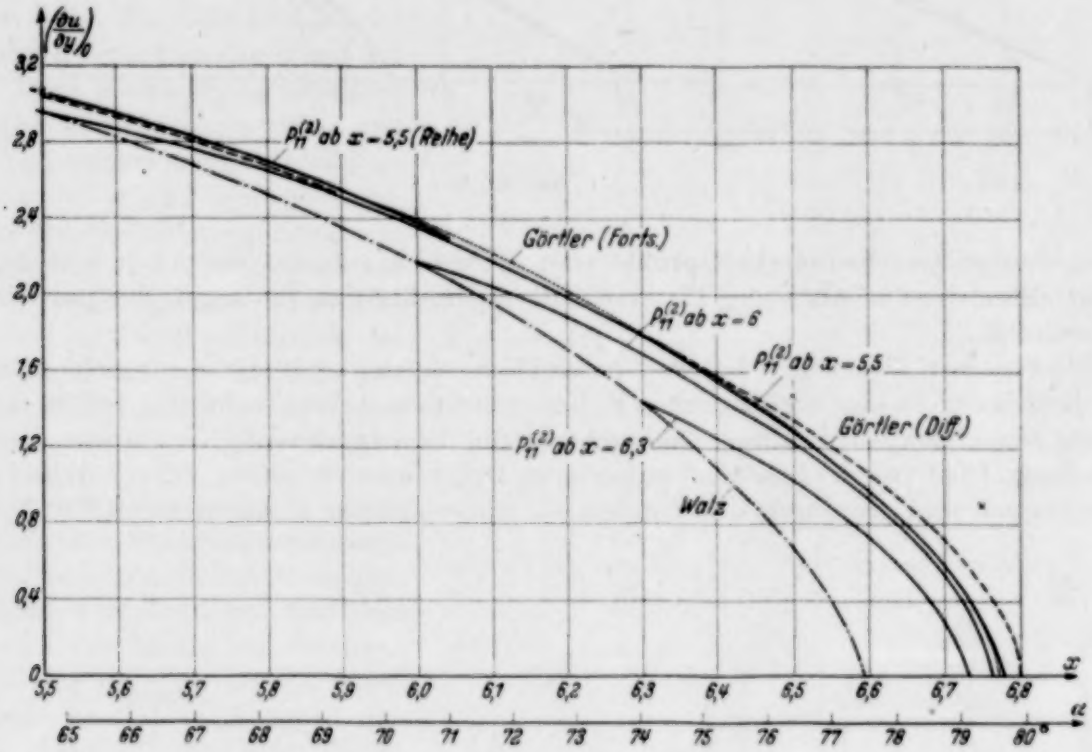


Abb. 8.

tangente $(\partial u/\partial y)_0$ über x bzw. a ist in Abb. 8 aufgetragen. Das *Walz*sche Verfahren (strichpunktiert) gibt wieder zu niedrige Werte. Gestrichelt ist die Kurve nach der Differenzenrechnung von *Görtler*; dagegen folgte aus einem ebenfalls strengen, aber umständlicheren Fortsetzungsverfahren desselben Verfassers die punktierte Kurve. Da wir die zweiparametrige Rechnung nicht im Staupunkt beginnen konnten, wurde jeweils bis $x = 5{,}5$, $x = 6$ und $x = 6{,}3$ nach *Walz*, und erst von dort ab mit dem $P_{11}^{(2)}$-Verfahren gerechnet. Je früher man mit der zweiparametrigen Rechnung beginnt, desto besser wird natürlich das Ergebnis; aber selbst wenn man erst bei $x = 6{,}3$, also 5° bis 6° vor der exakten Ablösestelle, anfängt, nähert sich der $(\partial u/\partial y)_0$-Verlauf noch wesentlich den anderen Kurven. Für die Ablösungsstelle ergibt sich hier

nach *Walz*	$x_A = 6{,}59$,	$a_A = 77{,}4°$,
„ $P_{11}^{(2)}$ ab $x = 6{,}3$ . .	6,73	79,0
„ „ „ $x = 6$ . .	6,76	79,4
„ „ „ $x = 5{,}5$ . .	6,77	79,6
„ *Görtler* (Forts.) . .	6,77	79,6
„ „ (Diff.) . . .	6,80	79,9
„ *Pohlhausen* P_4 . .	6,94	81,6
„ *Blasius*[2]	6,98	82,0.

[1] Siehe Fußnoten 3 und 4 von S. 231.
[2] *H. Blasius*, Z. Math. Phys. 56 (1908), S. 1.

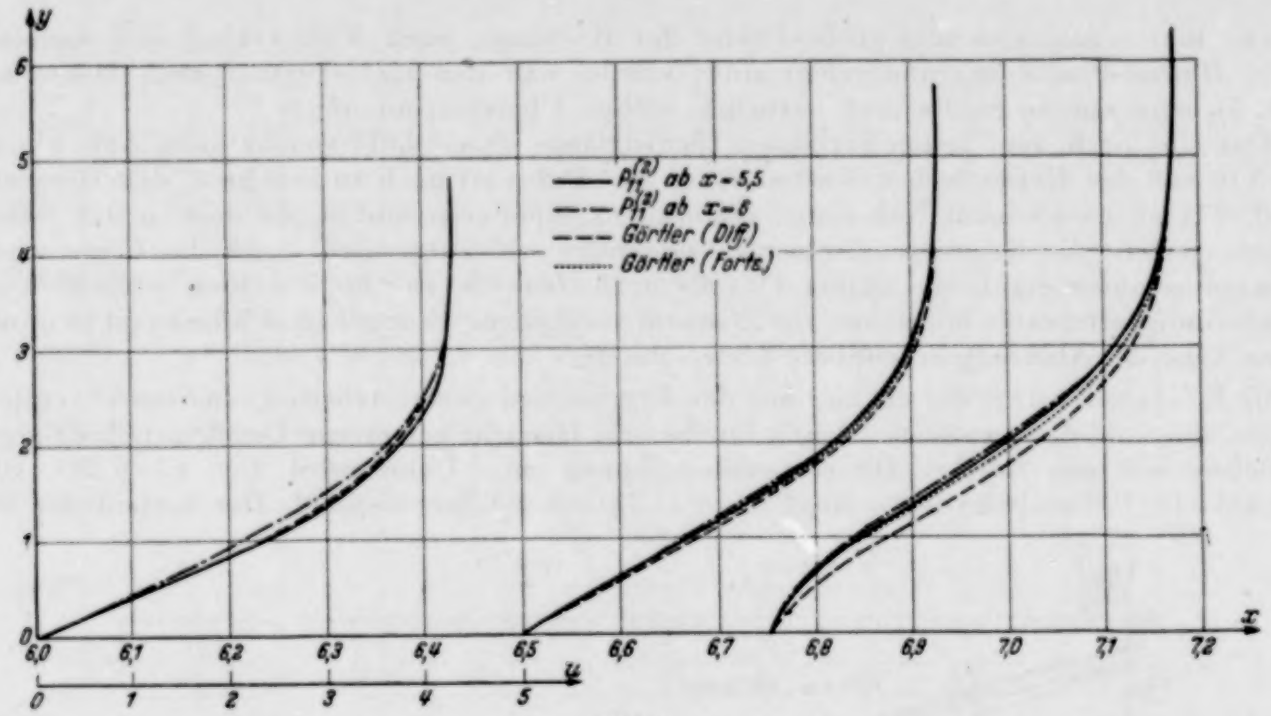


Abb. 9.

Einige zugehörige Geschwindigkeitsprofile sind in Abb. 9 aufgetragen. Auch hier ergeben sich erst unmittelbar vor der Ablösung Unterschiede gegenüber den Lösungen der partiellen Grenzschichtgleichung.

c) Elliptischer Zylinder 1:2,96. Schließlich wurde noch die Grenzschicht berechnet, die *G. B. Schubauer*[1] an einem elliptischen Zylinder mit dem Achsenverhältnis 1:2,96 ausgemessen hat. Streng berechnet wurde diese Grenzschicht für die experimentell ermittelte Geschwindigkeitsverteilung $U(x)$ von *K. Schröder*[2] mit seinem Differenzenverfahren. Dieser Arbeit haben wir $U(x)$ entnommen und graphisch differenziert (U dimensionslos gemacht mit 1,096 U_0, U_0=An-

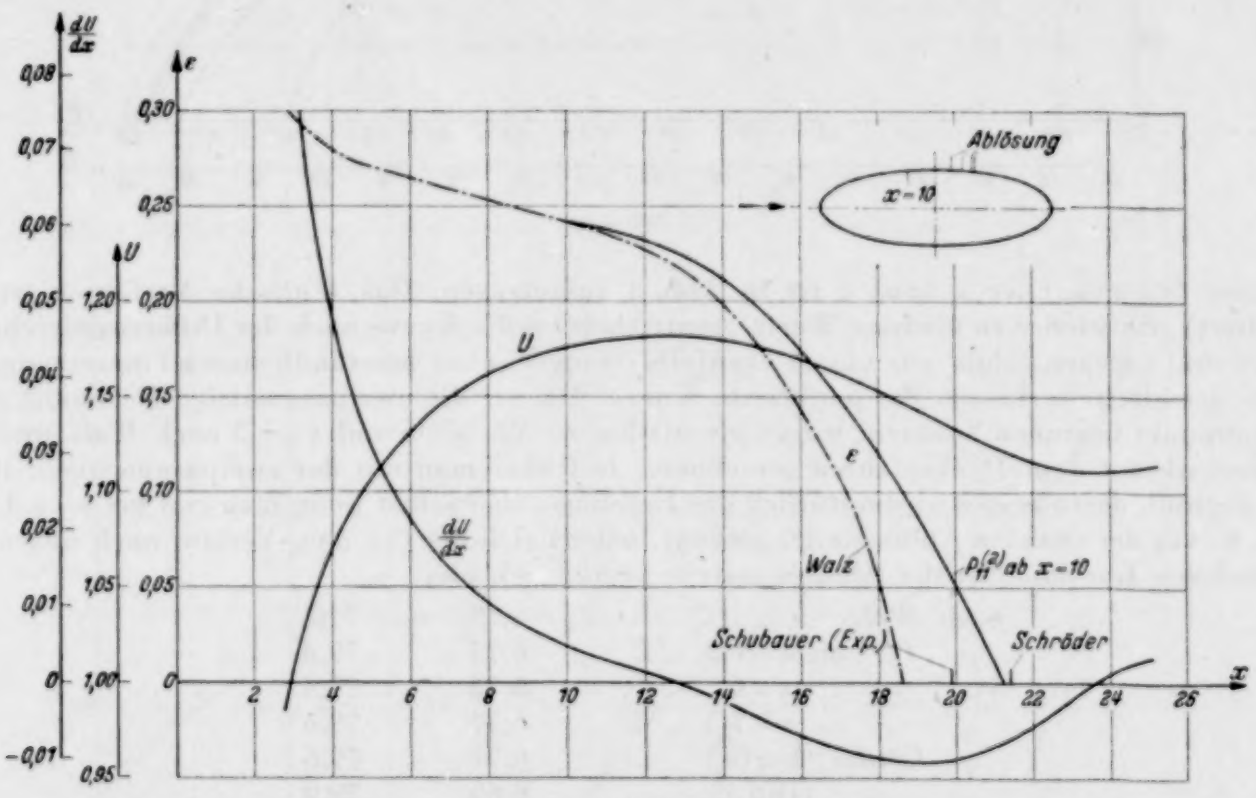


Abb. 10.

[1] *G. B. Schubauer*, Air Flow in a Separating Laminar Boundary Layer. NACA-Rep. 527 (1935).
[2] *K. Schröder*, Beschreibung der laminaren Grenzschicht an einem elliptischen Zylinder bei Zugrundelegung einer gemessenen Druckverteilung. UM 1024 (1943).

strömungsgeschwindigkeit; Längen mit $2b/10$, $2b$ = kleine Ellipsenachse). Abb. 10 zeigt wieder den $\varepsilon(x)$-Verlauf nach unserem Verfahren, wobei bis $x=10$ nach *Walz* gerechnet wurde (halber Ellipsenumfang $x=33{,}5$). Die Ablösestelle liegt

nach *Walz*	. . . . .	bei $x_A=18{,}5$,
„ *Schubauer* (Exp.)	. . . . .	19,9,
„ $P_{11}^{(2)}$ ab $x=10$	. . . . .	21,1,
„ *Schröder*	. . . . .	21,4.

Die Geschwindigkeitsprofile in Nähe der Ablösungsstelle sind in Abb. 11 aufgetragen. Die Ergebnisse der $P_{11}^{(2)}$-Rechnung liegen also zwischen denen von *Schröder* und den Messungen von *Schubauer*. Beim Vergleich mit den Versuchspunkten ist aber zu beachten, daß *Schubauer* mit einem Hitzdraht gemessen hat. Dieser gibt nämlich als Meßergebnis nur den Betrag der Geschwindigkeit, gleichgültig, welche Richtung die Strömung hat. In der Nähe der Ablösestelle, wo die Strömungsrichtung an der Wand um 180° dreht, kann man daher zumindest in Wandnähe keine Übereinstimmung zwischen der gerechneten Geschwindigkeitskomponente u und dem gemessenen Geschwindigkeitsbetrag erwarten. Die Ablösestelle $x_A=19{,}9$ selbst hat *Schubauer* visuell dadurch ermittelt, daß er aus einer Druckanbohrung im Zylinder Rauch austreten ließ und dadurch das Gebiet mit Rückströmung hinter der Ablösestelle sichtbar machte.

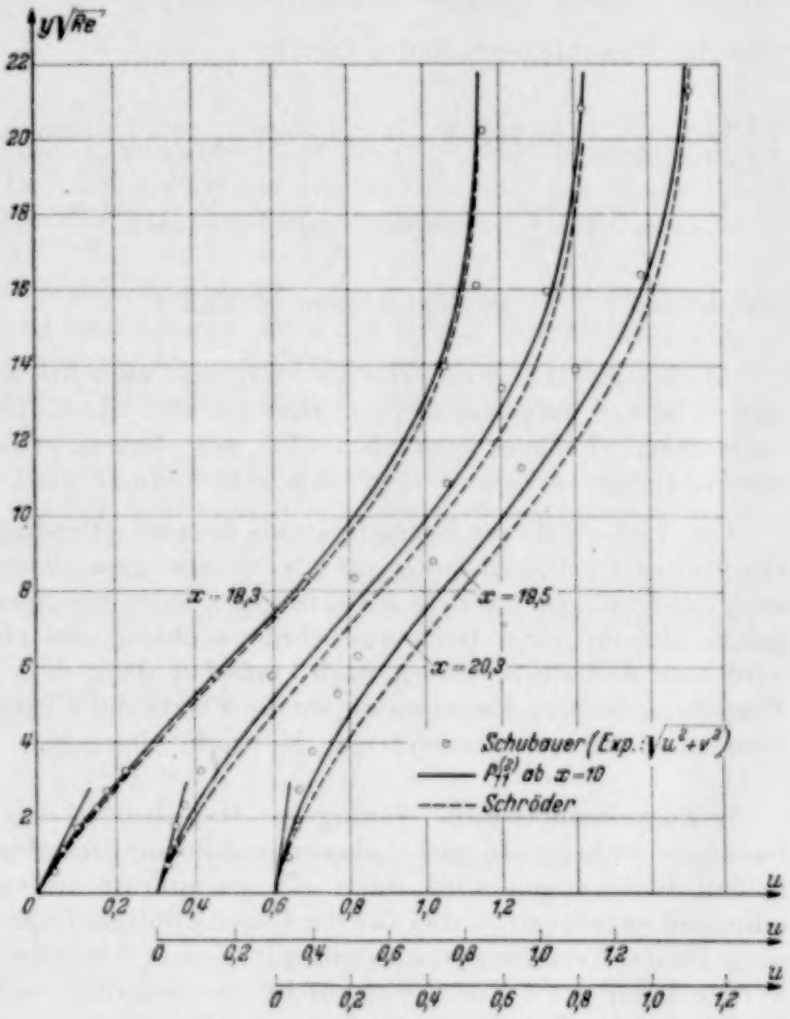


Abb. 11.

6. Reihenentwicklung für δ_2 und ε bei symmetrischer Staupunktströmung. Die in **5** behandelten Beispiele zeigen, daß das neue Verfahren mit den vorliegenden strengen Methoden durchaus konkurrenzfähig ist. So sind z. B. beim Kreiszylinder die Abweichungen zwischen den beiden „exakten" Rechnungen von *Görtler* untereinander von derselben Größenordnung wie die zwischen diesen beiden und der $P_{11}^{(2)}$-Rechnung. Eine noch größere Genauigkeit wäre also vor allem bei experimentell gefundenem $U(x)$-Verlauf gar nicht mehr sinnvoll. Es ist jedoch ein Schönheitsfehler, daß die Rechnung bis über das Druckminimum hinaus mit einem, wenn auch kleinen Fehler behaftet ist, der von der einparametrigen Rechnung herrührt. Wenn man also nicht nur die Ablösegegend genau berechnen will, sondern die gesamte Grenzschicht, so muß man zunächst vom Staupunkt ab mit der *Howarth*schen Reihenentwicklung[1] arbeiten. Der hierzu nötige Rechenaufwand kann dadurch etwas verringert werden, daß wir nur $\lambda^*(x)$ und $\varepsilon(x)$ brauchen, um daraus aus unseren Tabellen die Profile und deren charakteristische Größen zu entnehmen. Zur Berechnung von λ^* und ε benutzen wir die Tabellen von *A. Ulrich*[2], der in der Reihenentwicklung für U einige Glieder mehr als *Howarth* berechnet hat. Für symmetrische Staupunktströmung

$$U=u_1\,x+u_3\,x^3+u_5\,x^5+u_7\,x^7\,,$$

mit x = Bogenlänge vom Staupunkt, erhalten wir dann durch Integration für die Impulsdicke

[1] Siehe Fußnote 6 von S. 231.

[2] *A. Ulrich*, Die laminare Reibungsschicht am Kreiszylinder. ZWB-Fo.-Ber. 1762 (1943).

$$\delta_2 = \frac{1}{U^2}\sqrt{\frac{\nu}{u_1}}\left[0{,}29232\,u_1^2x^2 + 0{,}26692\,u_1u_3\,x^4 + (0{,}16450\,u_1u_5 + 0{,}10018\,u_3^2)\,x^6 - (0{,}60224\,u_1u_7 - 0{,}37049\,u_3u_5 + 0{,}10733\,\frac{u_5^2}{u_1}\right)x^8 - \left(0{,}87723\,u_3u_7 - 2{,}40696\,\frac{u_3^2u_5}{u_1} + 0{,}97833\,\frac{u_3^4}{u_1^2} + 0{,}70330\,u_5^2\right)x^{10} - \left(0{,}98644\,u_5u_7 - 1{,}86688\,\frac{u_3u_5^2}{u_1} + 1{,}25855\,\frac{u_3^3u_5}{u_1^2} - 0{,}14184\,\frac{u_5^2u_7}{u_1} - 0{,}15246\,\frac{u_5^3}{u_1^2}\right)x^{12} - \left(1{,}05068\,u_7^2 - 2{,}46683\,\frac{u_3u_5u_7}{u_1} + 1{,}02702\,\frac{u_3^2u_5^2}{u_1^2} + 1{,}16326\,\frac{u_3^3u_7}{u_1^2} - 0{,}92958\,\frac{u_3^4u_5}{u_1^3} + 0{,}27701\,\frac{u_3^6}{u_1^4}\right)x^{14}\Big] + \ldots$$

Für die Wandtangente findet *Ulrich*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\left[1{,}23264\,u_1\,x + 2{,}8984\,u_3\,x^3 + \left(3{,}8088\,u_5 + 0{,}7152\,\frac{u_3^2}{u_1}\right)x^5 + \left(4{,}6744\,u_7 + 1{,}4744\,\frac{u_3u_5}{u_1} + 0{,}0616\,\frac{u_3^2}{u_1^2}\right)x^7 + \left(1{,}517\,\frac{u_3u_7}{u_1} + 0{,}581\,\frac{u_5^2}{u_1} + 0{,}603\,\frac{u_3^2u_5}{u_1^2} - 0{,}309\,\frac{u_3^4}{u_1^3}\right)x^9\right] + \ldots$$

Aus δ_2 und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ ergibt sich dann λ^* und ε.

Als Beispiel ist für den *Hiemenz*-Kreiszylinder hiernach ε für $x = 5{,}5$, 6, 6,5 und 6,75 berechnet und in Abb. 8 aufgetragen ($\times$). Hier ist also die Konvergenz der obigen Reihen etwa bis $x = 6$ ausreichend. Rechnet man ab $x = 5{,}5$ mit diesem etwas zu großen ε-Wert nach dem $P_{11}^{(2)}$-Verfahren weiter, so kommt man auch sehr schnell wieder auf die genauen Werte (Abb. 8).

Ein Nachteil dieses Formelsystems besteht allerdings darin, daß man bei einer experimentell ermittelten $U(x)$-Verteilung erst ein Näherungspolynom hierfür aufstellen muß; ferner muß man zum mindesten für größere Entfernungen vom Staupunkt wegen der hohen Potenzen in x sehr genau, also mit einer Rechenmaschine, rechnen. Bei nicht allzu großen Genauigkeitsansprüchen wird man deshalb praktisch doch zunächst nach dem *Walz*-Verfahren rechnen, und erst in der Umgebung des Druckminimums, wo die Fehler der einparametrigen Rechnung beträchtlich werden können, zu der zweiparametrigen Methode übergehen.

7. Zusammenfassung. Analog zur Impulsgleichung wird eine Energiegleichung für die Reibungsschicht bei stationärer, ebener und inkompressibler Strömung abgeleitet. Auf Grund dieser beiden Gleichungen wird dann ein zweiparametriges Rechenverfahren für laminare Grenzschichten entwickelt, wobei für die Geschwindigkeitsprofile ein Polynom elften Grades angesetzt wird. Da das Verfahren wenigstens mit diesem Ansatz nicht bereits vom Staupunkt ab angewandt werden kann, wird die Grenzschicht zweckmäßig nach dem sehr handlichen einparametrigen Verfahren von *Walz* bis in die Nähe des Druckminimums und erst von dort ab — im Gebiet des Druckanstieges — nach dem neuen Verfahren berechnet. Solange der Druck abfällt, entstehen nämlich bei dem einparametrigen Verfahren nur geringe Fehler; außerdem werden diese Fehler durch die zweiparametrige Rechnung zum größten Teil wieder korrigiert. Auf diese Weise wird vor allem das Gebiet der Ablösung mit derselben Genauigkeit wie bei den „exakten" Grenzschichtrechnungen erfaßt, wie an drei Beispielen gezeigt wird. Zur Durchführung eines Rechenschrittes ist schätzungsweise etwa folgende Zeit nötig: Bei den einparametrigen Verfahren 2–3 Minuten, bei dem vorgeschlagenen zweiparametrigen 6–8 Minuten, dagegen bei dem Differenzenverfahren nach *Görtler* etwa 1 Stunde.

(Eingegangen am 20. Mai 1947.)

Anwendung des Energiesatzes von Wieghardt auf einparametrige Geschwindigkeitsprofile in laminaren Grenzschichten.

Von **A. Walz** in Emmendingen.

1. Einleitung und Aufgabenstellung. Bei den üblichen Näherungsverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten[1], [2], [3] werden klassifizierte Geschwindigkeitsprofile $u(y)$ benützt, deren Form der Einfachheit halber durch einen einzigen Parameter λ^* gekennzeichnet wird. Mit Hilfe des Impulssatzes und der aus der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung folgenden Randbedingung

$$-\left[\frac{\partial^2 (u/U)}{\partial (y/\delta_2)^2}\right]_{y=0} = \frac{dU}{ds}\frac{\delta_2^2}{\nu} = \lambda^*$$

(δ_2 = Impulsverlustdicke) gelingt es dann, die Aufeinanderfolge dieser Geschwindigkeitsprofile und ihre Ausdehnung in y-Richtung (die Dicke der Reibungsschicht) zu einer gegebenen Verteilung der Potentialgeschwindigkeit $U(s)$ in Strömungsrichtung (Abwicklungslänge s) zu berechnen.

K. Wieghardt[4] benützte neuerdings außer der Impulsbedingung und der Randbedingung $\lambda^* = U' \delta_2^2/\nu$ auch noch eine Energiebedingung und konnte dann auf Grund der neu hinzukommenden Gleichung die Geschwindigkeitsprofile mit zwei Parametern festlegen. Dadurch wird das Ergebnis der Grenzschicht-Berechnung verbessert, der Rechnungsaufwand allerdings vergrößert.

Hält man, um die Rechnung zu vereinfachen, an der Einparametrigkeit der Geschwindigkeitsprofile fest, so ist eine Nutzanwendung des Energiesatzes neben dem Impulssatz nur möglich, wenn man darauf verzichtet, die Randbedingung $\lambda^* = U' \delta_2^2/\nu$ zu erfüllen. Es soll nun durch Beispielrechnung nachgeprüft werden, ob es Vorteile bietet, bei einparametriger Rechnung die *Wieghardt*sche Energiebedingung an Stelle der Randbedingung $\lambda^* = U' \delta_2^2/\nu$ zur Bestimmung des Formparameters zu benützen.

2. Ableitung der Formeln. *Wieghardt* findet die Beziehung

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty \varrho\, u\left(\frac{U^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right) dy = \mu \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \tag{1}$$

(Energiestromverlust je Längeneinheit = Dissipation in der Längeneinheit).

Mit der Definition einer

$$\text{Energieverlustdicke} \quad \delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left]1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2\right] dy \tag{2}$$

und der bekannten Definition der

$$\text{Impulsverlustdicke} \quad \delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{3}$$

und der

$$\text{Verdrängungsdicke} \quad \delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{4}$$

kann (1) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\frac{\delta_2}{\nu U^2}\frac{d}{ds}(U^3 \delta_3) = \int_0^\infty \left[\frac{\partial (u/U)}{\partial (y/\delta_2)}\right]^2 d(y/\delta_2). \tag{5}$$

---

[1] *Pohlhausen*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 252.

[2] *H. Holstein*, *T. Bohlen*, Über die laminare und turbulente Reibungsschicht. Preisarbeiten zum Preisausschreiben 1940 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Bericht S. 10.

[3] *A. Walz*, Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht. UM Nr. 3060 (1943).

[4] *K. Wieghardt*, Ing.-Arch. 16 (1947), S. 231.

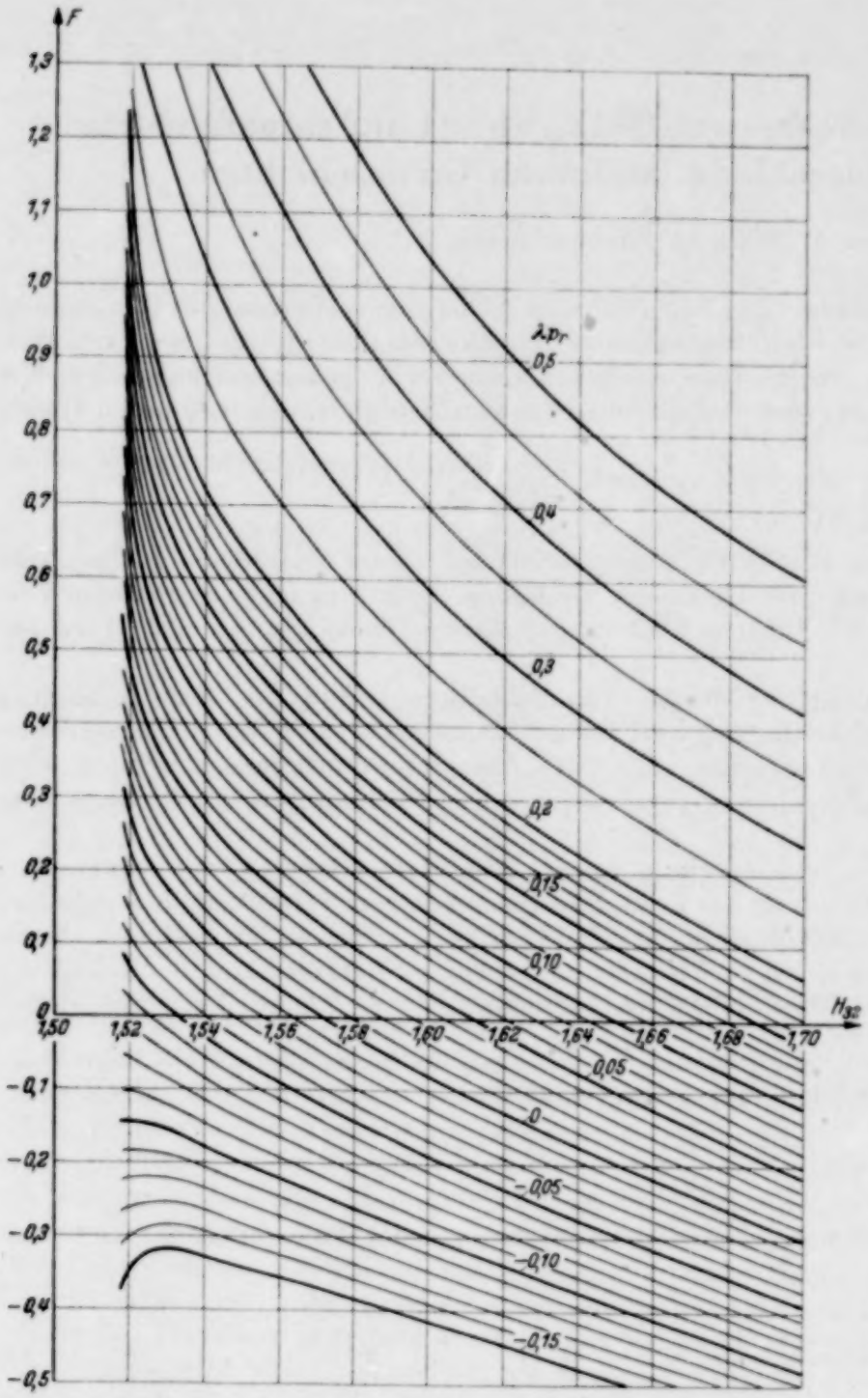


Abb. 1. Kurvenblatt zur graphischen Integration der Differentialgleichung $\frac{dH_{32}}{ds} = \frac{F(H_{32}, \lambda^* p_r)}{Uz^*}$.
Graphische Darstellung der Funktion $H_{32}(H_{32}, \lambda^* p_r)$ für *Hartree*-Profile.

Führt man schließlich noch die üblichen Abkürzungen

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}, \tag{6}$$

$$\frac{\delta_3}{\delta_2} = H_{32}, \tag{7}$$

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} = z^*, \tag{8}$$

sowie

$$\varepsilon^* = \left[\frac{\partial\,(u/U)}{\partial\,(y/\delta_2)}\right]_{y=0} \tag{9}$$

(dimensionslose Wandschubspannung)

und

$$D^* = \int_0^\infty \left[\frac{\partial\,(u/U)}{\partial\,(y/\delta_2)}\right]^2 d\,(y/\delta_2) \tag{10}$$

(dimensionslose Dissipation)

ein, so geht (5) über in eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für H_{32}:

$$\left.\frac{dH_{32}}{ds} + H_{32}\left[\frac{\varepsilon^*}{Uz^*} - \frac{dU}{ds}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{1}{U}(H_{12}-1)\right] - \frac{2D^*}{Uz^*} = 0.\right\} \tag{11}$$

Dabei ist gleichzeitig die Impulsgleichung (12) verwertet. Die Größen H_{12}, ε^* und D^* sind für eine bestimmte einparametrige Klasse von Geschwindigkeitsprofilen eindeutige Funktionen der als Formparameter aufzufassenden Größe H_{32}, die ihrerseits in einem festen Zusammenhang mit dem gebräuchlichen Formparameter $\lambda^* = \left[\frac{\partial^2\,(u/U)}{\partial\,(y/\delta_2)^2}\right]_{y=0}$ steht. Auf die aus der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung folgende Setzung $\lambda^* = U'\,\delta_2^2/\nu$ wird hier, wie schon erwähnt, verzichtet. Es bietet jedoch für das Rechnen mit (11) Vorteile, $U'\delta_2^2/\nu$ als Hilfsgröße zu benützen. Man kann nämlich dann (11) in der Form

$$\frac{dH_{32}}{ds} = \frac{F\left(H_{32}, \frac{U'\delta_2^2}{\nu}\right)}{Uz^*} \tag{11a}$$

schreiben und die Funktion F mit $U'\delta_2^2/\nu = \lambda^* p_r$ als Parameter ein für allemal graphisch darstellen (Abb. 1 für *Hartree*-Profile).

In (11a) kommt noch die unbekannte Größe $z^* = \delta_2^2/\nu$ bzw. Uz^* vor. Wir brauchen also noch eine zweite Gleichung. Diese liefert uns in bekannter Weise der Impulssatz

$$\frac{d\,(Uz^*)}{ds} + Uz^*\left[2H_{12} + 3\right]\frac{dU}{ds}\frac{1}{U} - 2\varepsilon^* = 0. \tag{12}$$

Gleichung (12) kann unter der Voraussetzung eines abschnittsweise linearen Geschwindigkeitsverlaufs

$$U = U_{i-1} + k(s - s_{i-1}), \qquad k = \frac{U_i - U_{i-1}}{s_i - s_{i-1}}$$

(Index i-1: Anfang, Index i: Ende eines Abschnitts $s_i - s_{i-1} = \Delta s$)

integriert werden. Man erhält dann

$$(Uz^*)_i = (Uz^*)_{i-1}\, A + B \Delta s\,, \tag{13}$$

wo A und B für eine bestimmte Klasse von Geschwindigkeitsprofilen ein für allemal angebbare Funktionen des Formparameters H_{32} und des Verhältnisses U_{i-1}/U_i sind:

$$A = \left(\frac{U_{i-1}}{U_i}\right)^{3+2H_{12}}, \qquad B = \frac{1 - \left(\frac{U_{i-1}}{U_i}\right)^{4+2H_{12}}}{1 - \frac{U_{i-1}}{U_i}} \cdot \frac{\varepsilon^*}{2 + H_{12}} \tag{14), (15}$$

mit

$$H_{12} = f_1(H_{32}), \quad \varepsilon^* = f_2(H_{32}).$$

A und B sind in Zahlentafel 1 für die *Hartree*-Profile tabelliert.

In Zahlentafel 2 ist der Zusammenhang zwischen den Größen H_{32}, $\hat{\lambda}^*$, H_{12}, ε^* und D^* für die Geschwindigkeitsprofile von *Hartree* und *Pohlhausen* (P_4) angegeben.

Um Zahlentafel 1 benützen zu können, teilt man also die vorgegebene Kurve $U(s)$ in solche (hinreichend kleine) Abschnitte auf, daß U_{i-1}/U_i die in der Zahlentafel enthaltenen runden Werte annimmt.

Für die Lösung von (11a) durch graphisches Integrieren legt man der ganzen Rechnung zweckmäßig das folgende Rechenschema zugrunde:

(1)	(2)	(3)	(4) $= \bar{s}$	(5) $= \Delta s$	(6) $= \left(\frac{\bar{U}'}{\bar{U}}\right)$	(7)	(8)	(9)
$\frac{U_{i-1}}{U_i}$	$\frac{2\,(1-(1))}{1+(1)}$	s	$\frac{(3)_{i-1}+(3)_i}{2}$	$(3)_i - (3)_{i-1}$	$\frac{(2)}{(5)}$	$H_{32}(\bar{s})$ (schätzen)	A	B
mit der Geschwindigkeitsverteilung $\frac{U}{U_\infty}$ festliegende Werte.							aus Zahlentafel 1 zu entnehmen.	

(10) $-Uz^*(s)$	(11) $-(\overline{Uz^*})$	(12) $= \bar{\lambda}^* P_r$	(13)	(14) $= \frac{dH_{32}}{ds}(\bar{s})$	(15)	(16)	(17) $= \frac{\delta_2}{l}$
$(16)_{i-1}(8)_i + (5)(9)$	$\frac{(16)_{i-1}+(10)_i}{2,0}$	(6) (11)	$F(\bar{H}_{32}, \bar{\lambda}_{Pr})$	$\frac{(13)}{(11)}$	$H_{32}(\bar{s})$ endgültig	$Uz(s)$ endgültig	$\sqrt{\frac{(16)}{\frac{U_\infty l}{\nu}\cdot\frac{U}{U_\infty}}}$
			aus Kurvenblatt Abb. 1 zu entnehmen.				

3. Beispiele. In Abb. 2 ist für die *Howarth*-Strömung $U = 1 - s$ die nach verschiedenen Rechenverfahren gewonnene dimensionslose Wandschubspannung,

$$\varepsilon^* = \left[\frac{\partial\,(u/U)}{\partial\,(y/\delta_2)}\right]_{y=0}$$

über der Abwicklung s aufgetragen. ($\varepsilon^* = 0$ bedeutet laminare Ablösung). Zunächst ist zu erkennen, daß die Rechnung mit zwei freien Parametern, nämlich $\hat{\lambda}^*$ und ε^*, von *Wieghardt* (dünn ausgezogene Kurve) recht gut mit der exakten Rechnung von *Howarth* (dünn gestrichelt) übereinstimmt. Die stärksten Abweichungen von der exakten Rechnung ergeben sich mit den üblichen einparametrigen Näherungsverfahren, die mit der Bedingung $\hat{\lambda}^* = U'\delta_2^2/\nu$ bei Benützung der

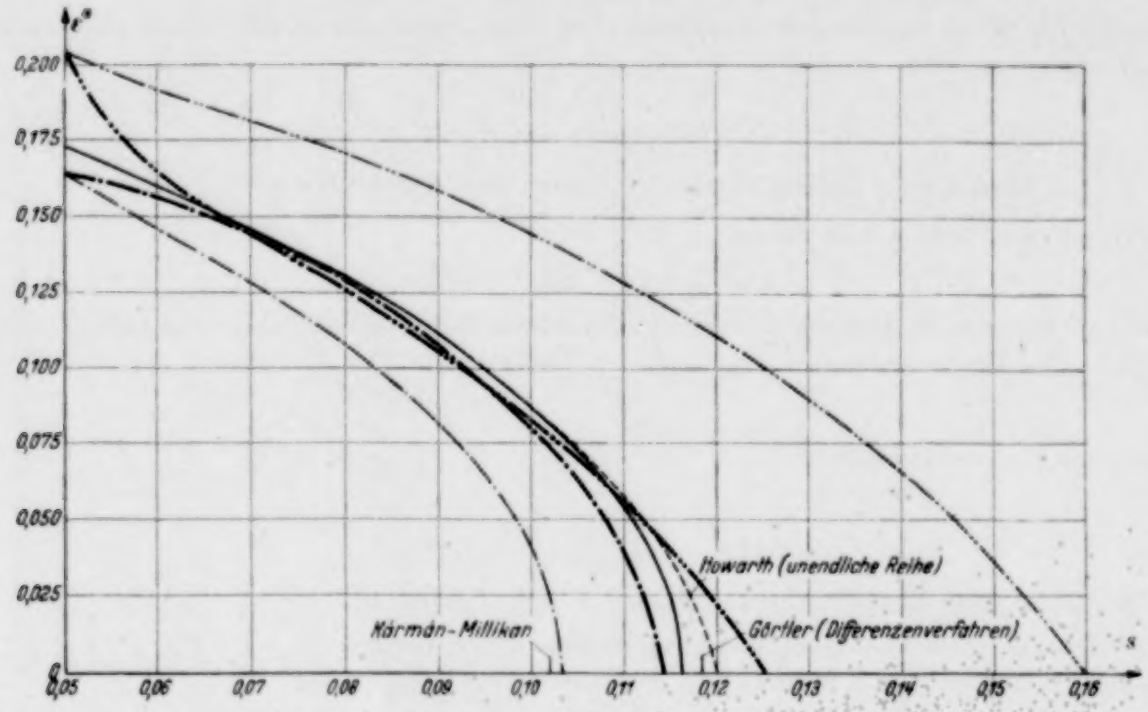


Abb. 2. Rechenbeispiel: *Howarth*-Strömung $U = 1 - s$. Verlauf der dimensionslosen Wandschubspannung $\varepsilon^* = \left[\frac{\partial (u/U)}{\partial\, y/\delta_2^2}\right]_{y=0}$ über s. Vergleich der mit verschiedenen Rechenverfahren erhaltenen Ergebnisse.

Pohlhausen P_4-Profile zu späte laminare Ablösung, bei Benützung der *Hartree*-Profile hingegen zu frühe Ablösung liefern. Verzichtet man auf die Bedingung $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ und erfüllt dafür die Energiebedingung (11) bzw. (11a) mit Beachtung der Impulsbedingung (12), so rücken sowohl die mit *Hartree*-Profilen als auch mit *Pohlhausen* P_4-Profilen gerechneten Näherungslösungen $\varepsilon^*(s)$ wesentlich näher an die exakteren Lösungen von *Howarth* und *Wieghardt* heran (dick ausgezogene Kurven).

Abb. 3 zeigt einen entsprechenden Vergleich von Rechenergebnissen für das ebenfalls bekannte Beispiel der Strömung um einen elliptischen Zylinder, die von *Schubauer* auch experimentell untersucht wurde. Auch hier erweist es sich, wenn man einparametrig rechnen will, für beide gewählten Klassen von Geschwindigkeitsprofilen als besser, die Energiebedingung an Stelle

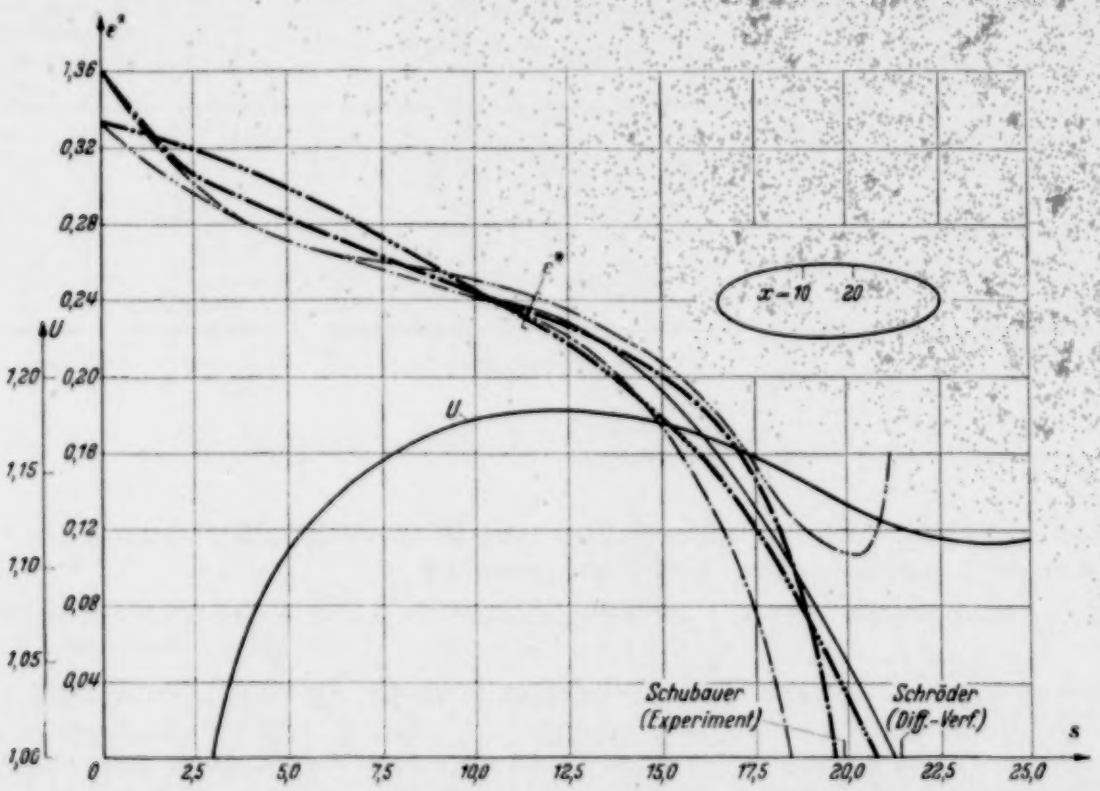


Abb. 3. Rechenbeispiel: Elliptischer Zylinder (*Schubauer*). Verlauf der dimensionslosen Wandschubspannung ε^* über der Abwicklung s. Vergleich der mit verschiedenen Rechenverfahren erhaltenen Ergebnisse.

Zahlentafel 1.

Zur Berechnung der Impulsverlustdicke δ_2 mit Geschwindigkeitsprofilen von Hartree

$$aus\ (U z^*)_i = A\,(U z^*)_{i-1} - B\,(s_{i-1} - s_i);\ z^* = \frac{\delta_2^2}{\nu}$$

$(s_i - s_{i-1})$ = Breite eines Abschnittes mit linearem Geschwindigkeitsverlauf.

H_{32}	$\frac{U_{i-1}}{U_i} = 0.5$		0.8		0.9		0.96		0.99		1.000		1.005		1.010	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1.5184	0.00046	0	0.0845	0	0.3111	0	0.6365	0	0.8950	0	1.000	0	1.0569	0	1.1165	0
1.5190	0.0006	0.0048	0.0899	0.0111	0.3251	0.0170	0.6481	0.0227	0.8985	0.0264	1.000	0.0280	1.0547	0.0288	1.1120	0.0295
1.5200	0.0008	0.0099	0.0991	0.0226	0.3350	0.0343	0.6555	0.0470	0.9014	0.0531	1.000	0.0560	1.0532	0.0575	1.1087	0.0590
1.5220	0.0010	0.0171	0.1074	0.0391	0.3483	0.0586	0.6655	0.0771	0.9046	0.0894	1.000	0.0940	1.0512	0.0964	1.1046	0.0987
1.5240	0.0012	0.0223	0.1132	0.0506	0.3574	0.0756	0.6720	0.0990	0.9070	0.1137	1.000	0.1200	1.0500	0.1234	1.1020	0.1259
1.5260	0.0013	0.0272	0.1181	0.0616	0.3641	0.0913	0.6770	0.1200	0.9084	0.1368	1.000	0.1440	1.0490	0.1473	1.1010	0.1523
1.5280	0.0014	0.0315	0.1217	0.0711	0.3695	0.1048	0.6808	0.1359	0.9098	0.1559	1.000	0.1650	1.0483	0.1678	1.0985	0.1718
1.5300	0.0015	0.0356	0.1242	0.0802	0.3732	0.1181	0.6834	0.1528	0.9106	0.1752	1.000	0.1850	1.0478	0.1884	1.0974	0.1926
1.5350	0.0018	0.0447	0.1308	0.1000	0.3828	0.1465	0.6900	0.1887	0.9130	0.2158	1.000	0.2260	1.0466	0.2310	1.0949	0.2367
1.5400	0.0021	0.0528	0.1363	0.1173	0.3900	0.1711	0.6950	0.2197	0.9144	0.2500	1.000	0.2620	1.0456	0.2680	1.0929	0.2739
1.5500	0.0025	0.0673	0.1462	0.1486	0.4030	0.2147	0.7044	0.2725	0.9170	0.3097	1.000	0.3240	1.0440	0.3310	1.0815	0.3380
1.5600	0.0030	0.0807	0.1542	0.1772	0.4129	0.2543	0.7106	0.3215	0.9195	0.3625	1.000	0.3800	1.0428	0.3882	1.0871	0.3967
1.5700	0.0034	0.0932	0.1603	0.2033	0.4210	0.2900	0.7158	0.3652	0.9212	0.4110	1.000	0.4310	1.0419	0.4403	1.0851	0.4480
1.5800	0.0038	0.1054	0.1658	0.2282	0.4277	0.3247	0.7204	0.4070	0.9222	0.4592	1.000	0.4790	1.0410	0.4877	1.0834	0.4973
1.5900	0.0041	0.1172	0.1710	0.2533	0.4339	0.3577	0.7244	0.4472	0.9240	0.5012	1.000	0.5250	1.0404	0.5350	1.0820	0.5454
1.6000	0.0045	0.1287	0.1754	0.2772	0.4393	0.3898	0.7278	0.4852	0.9250	0.5442	1.000	0.5680	1.0397	0.5795	1.0807	0.5905
1.6100	0.0048	0.1395	0.1799	0.2992	0.4443	0.4195	0.7310	0.5214	0.9260	0.5835	1.000	0.6080	1.0392	0.6212	1.0795	0.6318
1.6200	0.0052	0.1499	0.1836	0.3207	0.4491	0.4475	0.7340	0.5554	0.9269	0.6224	1.000	0.6470	1.0387	0.6605	1.0785	0.6712
1.6300	0.0055	0.1604	0.1875	0.3414	0.4532	0.4758	0.7368	0.5880	0.9278	0.6560	1.000	0.6840	1.0382	0.6980	1.0775	0.7100
1.6400	0.0058	0.1707	0.1910	0.3625	0.4572	0.5040	0.7390	0.6224	0.9284	0.6920	1.000	0.7220	1.0378	0.7365	1.0766	0.7482
1.6500	0.0061	0.1808	0.1941	0.3832	0.4608	0.5306	0.7414	0.6540	0.9290	0.7260	1.000	0.7580	1.0374	0.7730	1.0759	0.7865
1.6600	0.0063	0.1902	0.1960	0.4018	0.4633	0.5560	0.7430	0.6838	0.9296	0.7584	1.000	0.7920	1.0372	0.8070	1.0753	0.8214
1.6700	0.0065	0.1993	0.1982	0.4209	0.4656	0.5814	0.7442	0.7136	0.9301	0.7905	1.000	0.8270	1.0369	0.8420	1.0749	0.8565
1.6800	0.0067	0.2086	0.1997	0.4396	0.4670	0.6055	0.7455	0.7426	0.9303	0.8235	1.000	0.8600	1.0367	0.8765	1.0745	0.8912
1.6900	0.0069	0.2171	0.2013	0.4572	0.4692	0.6294	0.7462	0.7724	0.9307	0.8540	1.000	0.8920	1.0365	0.9095	1.0741	0.9246
1.7000	0.0040	0.2265	0.2027	0.4754	0.4704	0.6544	0.7475	0.8024	0.9310	0.8870	1.000	0.9260	1.0363	0.9425	1.0737	0.9584

Zahlentafel 2.

Zusammenhang zwischen den charakteristischen Kenngrößen der laminaren Grenzschicht.

1. für Geschwindigkeitsprofile von *Hartree*.

H_{32}	$\lambda^{***})$	H_{12}	ε^*	D^*
1,5184*)	−0,0682	4,038	0	0,1569
1,5200	−0,0660	3,685	0,028	0,1567
1,530	−0,0534	3,173	0,093	0,1580
1,540	−0,0406	2,965	0,131	0,1609
1,550	−0,0280	2,810	0,162	0,1640
1,560	−0,0150	2,696	0,190	0,1682
1,570	−0,0015	2,603	0,217	0,1727
1,572**)	0	2,591	0,220	0,1732
1,580	0,0104	2,527	0,240	0,1771
1,590	0,0232	2,460	0,263	0,1820
1,600	0,0360	2,400	0,284	0,1870
1,650	0,0994	2,175	0,379	0,2132
1,700	0,163	2,075	0,463	0,2390

2. für Geschwindigkeitsprofile von *Pohlhausen* (P_4).

H_{32}	λ^*	H_{12}	ε^*	D^*
1,5275*)	−0,1570	3,500	0	0,1568
1,5280	−0,1545	3,460	0,0050	0,1569
1,530	−0,1440	3,340	0,0255	0,1570
1,540	−0,0990	3,000	0,1010	0,1596
1,550	−0,0625	2,810	0,154	0,1638
1,560	−0,0310	2,670	0,195	0,1686
1,570	−0,0035	2,565	0,230	0,1739
1,571**)	0	2,555	0,235	0,1745
1,580	0,0225	2,480	0,263	0,1795
1,590	0,0470	2,400	0,294	0,1857
1,600	0,0695	2,330	0,323	0,1925
1,610	0,0900	2,270	0,350	0,2008

*) Wert für laminare Ablösung.
**) Wert für Strömung ohne Druckgradient (ebene Platte).
***) Es ist für die Geschwindigkeitsprofile von *Hartree* $\lambda^* \approx 1.272\ H_{32} - 2{,}000$.

der Bedingung $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ zu erfüllen (die einparametrige Rechnung mit dem bekannten *Pohlhausen*-P_4-Verfahren liefert mit der Bedingung $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ im Widerspruch zum experimentellen Ergebnis überhaupt keine Ablösung).

4. Zusammenfassung. Das zweiparametrige Rechenverfahren für laminare Reibungsschichten von *K. Wieghardt*, das außer dem Impulssatz auch noch eine Energiebedingung benützt, wird zur Vereinfachung der Rechnung in ein einparametriges Verfahren abgeändert. Dabei muß aber, um eine Überbestimmtheit der Aufgabe zu vermeiden, auf die Erfüllung der Bedingung $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ (Randbedingung aus der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung) verzichtet werden.

Mit diesem abgeänderten Rechenverfahren durchgeführte Beispiele lassen folgendes erkennen:

1. Es wird eine wesentliche Verbesserung der Rechenergebnisse gegenüber bisherigen einparametrigen Rechenverfahren erreicht.

2. Der Einfluß der gewählten Klasse von Geschwindigkeitsprofilen auf das Rechenergebnis wird durch Erfüllung der Energiebedingung an Stelle von $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ wesentlich herabgesetzt, d. h. man kann z. B. die *Pohlhausen*-P_4-Profile durch *Hartree*-Profile ersetzen, ohne daß sich durch diese Vertauschung im Verlauf der Wandschubspannung und für die Stelle der laminaren Ablösung große Unterschiede ergeben.

Aus diesen Rechnungen kann geschlossen werden, daß die Erfüllung der Energiebedingung in der Regel wichtiger sein wird als die Erfüllung der Randbedingung $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ aus der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung. Zur Erklärung dieses Ergebnisses ist folgendes zu sagen:

Die Bedingung $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ wählt für jede Stelle s die Geschwindigkeitsprofile aus der benützten Profilklasse so aus, daß ihre Form $u(y)$ in Wandnähe mit der Aussage der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung übereinstimmt. Erfüllt man an Stelle von $\lambda^* = U'\delta_2^2/\nu$ den Energiesatz, so ist dafür gesorgt, daß man Geschwindigkeitsprofile erhält, die im Mittel über die ganze Grenzschichtdicke richtig sind, was offenbar für die Gewinnung einer richtigen Wandschubspannung und damit auch der richtigen laminaren Ablösestelle wesentlich ist.

(Eingegangen am 20. Mai 1947.)

Einfluß der Elastizität der Gase auf die Wirkung von Schaufelgittern.

Von **A. Betz** in Göttingen[1].

1. Einleitung. Bei Strömungsmaschinen werden durch Umlenkung der Strömungsrichtung und die damit verbundene Änderung der Strömungsgeschwindigkeit Änderungen des Druckes und Kraftwirkungen auf die umlenkenden Schaufeln erzeugt. Als vereinfachten Vorgang pflegt man die Strömung durch ein Schaufelgitter zu betrachten, das aus einer geraden unendlichen Reihe von lauter gleichen zylindrischen Schaufeln in gleichem Abstand besteht. Man erhält dabei eine Strömung, welche in Ebenen senkrecht zu den Gitterschaufeln verläuft und in allen diesen Ebenen gleich ist, also eine sogenannte ebene Strömung. Ein wesentlicher Vorteil dieser vereinfachten Anordnung besteht darin, daß man das Koordinatensystem so wählen kann, daß das Gitter ruht und nur die Flüssigkeit sich bewegt, daß man also eine stationäre Strömung erhält. Bei nichtzusammendrückbaren Flüssigkeiten ergeben sich hierbei sehr einfache Beziehungen zwischen der vom Gitter bewirkten Ablenkung der Strömungsrichtung, den Drücken vor und hinter dem Gitter und den Kraftwirkungen. Wenn bei zusammendrückbaren Flüssigkeiten die Druckunterschiede merkliche Dichteänderungen zur Folge haben, so werden diese Zusammenhänge weniger übersichtlich. Im folgenden sollen diese Einflüsse der Dichteänderung untersucht und die Ergebnisse in Schaubildern einer bequemen Verwendung zugänglich gemacht werden. Die Ergebnisse sind für Geschwindigkeiten sowohl unter wie über der Schallgeschwindigkeit dargestellt. Dabei muß aber dahingestellt bleiben, wie weit sich bei Überschallgeschwindigkeit solche Gitterströmungen überhaupt verwirklichen lassen.

Abb. 1. Flügelgitter.

2. Verlustlose Vorgänge. Wir bezeichnen die Geschwindigkeit der Strömung mit w, ihre Komponente parallel zur Gitterrichtung mit u und die Komponente senkrecht dazu mit v. p und ϱ sind Druck und Dichte der Flüssigkeit. Die Werte vor dem Gitter erhalten den Index 1, die hinter dem Gitter den Index 2. Abb. 1 zeigt ein Gitter mit den entsprechenden Größen. Mit dem Index o wollen wir die Größen bezeichnen, die der Geschwindigkeit Null entsprechen.

Zunächst wollen wir von Energieverlusten beim Durchströmen des Gitters absehen. Bei konstanter Dichte, also bei nicht zusammendrückbarer Flüssigkeit, ist dann auf Grund der *Bernoulli*schen Gleichung[2]

$$p_1 + \frac{\varrho}{2}(u_1^2 + v_1^2) = p_2 + \frac{\varrho}{2}(u_2^2 + v_2^2) = p_0 . \tag{1}$$

Da außerdem ebensoviel Flüssigkeit zu- wie abströmen muß, ist

$$v_1 = v_2 , \tag{2}$$

so daß wir die einfache Beziehung

$$p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 \tag{3}$$

erhalten. Ist t der Abstand der Schaufeln, die sogenannte Gitterteilung, so ergibt sich die Kraft auf eine Schaufel von der Länge Eins senkrecht und parallel zur Gitterrichtung zu

$$P_y = (p_1 - p_2)\, t = \frac{\varrho}{2}(u_2^2 - u_1^2)\, t \tag{4}$$

und

$$P_x = \varrho\, v\, (u_1 - u_2)\, t . \tag{5}$$

Ist die Dichte nicht konstant, so ergeben sich in zweifacher Hinsicht Abweichungen von diesen einfachen Zusammenhängen: Einmal tritt an Stelle der *Bernoulli*schen Gleichung (1) die allgemeine

$$\frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2) + \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2) + \int_{p_0}^{p_2} \frac{dp}{\varrho} . \tag{6}$$

[1] Diese Arbeit war in der Festschrift der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung zum 70. Geburtstag von Professor *Prandtl* (4. Februar 1945) enthalten, die aber vor ihrer Ausgabe vollständig durch Feuer vernichtet wurde.

[2] *A. Betz*, Tragflügel und hydraulische Maschinen. Handb. d. Phys., Bd. VII, S. 232, Berlin 1927.

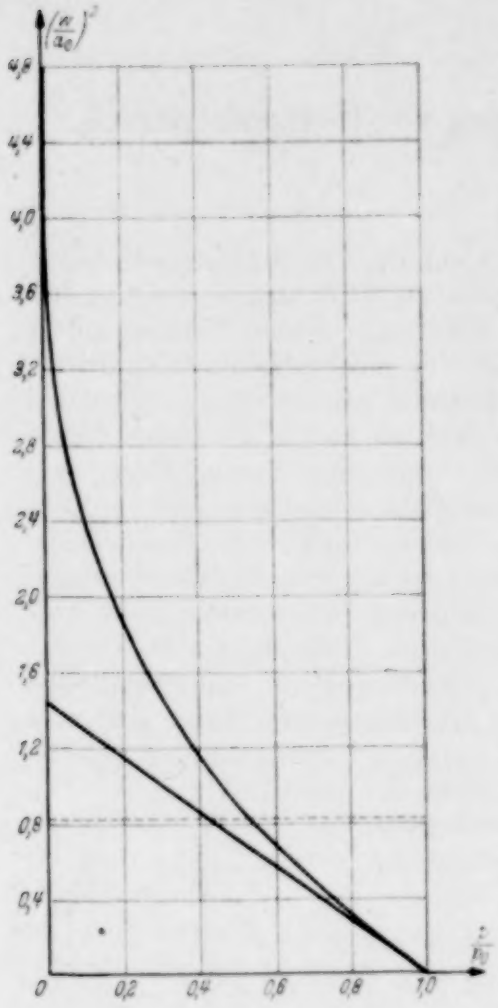


Abb. 2. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Druck.

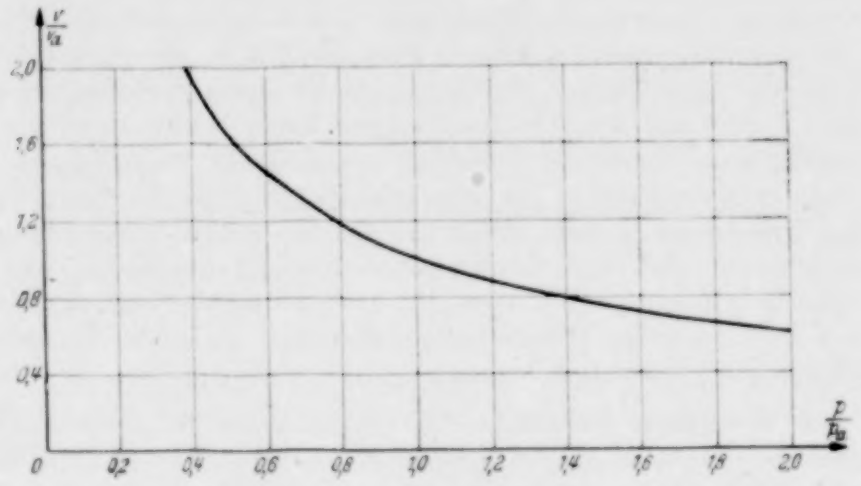


Abb. 3. Abhängigkeit der Durchflußkomponente v vom Druck.

Außerdem ist wegen des Dichteunterschiedes vor und hinter dem Gitter nicht mehr $v_1 = v_2$, sondern

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2 . \tag{7}$$

Durch Berechnung des Integrals $\int dp/\varrho$ in der verallgemeinerten *Bernoulli*schen Gleichung (6) ergibt sich als Zusammenhang zwischen p, ϱ und $w^2 = v^2 + u^2$ die bekannte Beziehung[1]

$$(p/p_0)^{(\varkappa-1)/\varkappa} = (\varrho/\varrho_0)^{\varkappa-1} = 1 - \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{w}{c_0}\right)^2, \tag{8}$$

wobei a_0 die Schallgeschwindigkeit im Gas bei der Geschwindigkeit Null, und $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen ist. Für Luft ist

$$\varkappa = 1{,}4 . \tag{9}$$

Dieser Wert ist den weiteren Rechnungen zugrunde gelegt. Der Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit ist in Abb. 2 dargestellt[2]. Nach der einfachen *Bernoulli*schen Gleichung für zusammendrückbare Gase würden wir

$$\left(\frac{w}{a_0}\right)^2 = \frac{2}{\varrho_0}\left(\frac{p_0 - p}{a_0^2}\right) = \frac{2}{\varrho_0}\frac{p_0}{a_0^2}\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) = \frac{2}{\varkappa}\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \tag{10}$$

erhalten. Auch diese Beziehung ist in Abb. 2 eingetragen, sie ergibt eine Gerade. Der Unterschied zwischen dieser Geraden und der Kurve stellt den Einfluß der Elastizität der Gase dar.

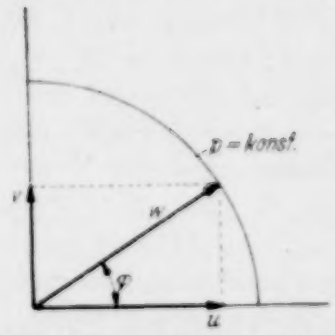


Abb. 4. Zerlegung der Geschwindigkeit w in ihre Komponenten u und v.

Da im bewegten Gas die Temperatur niedriger ist als im ruhenden, ist auch die Schallgeschwindigkeit niedriger. Wenn das Gas mit der Schallgeschwindigkeit strömt, ist daher w/a_0 nicht 1, sondern 0,913 und $(w/a_0)^2 = 0{,}833$. Dieser Zustand ist in Abb. 2 durch eine gestrichelte Linie bezeichnet.

In Abb. 3 ist der Zusammenhang zwischen v und p dargestellt, der sich auf Grund der Kontinuitätsgleichung (7) ergibt, wenn wir ϱ nach (8) durch p ersetzen:

$$\frac{v}{v_a} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{-1} = \left(\frac{p}{p_a}\right)^{-1/\varkappa} . \tag{11}$$

Dabei soll der Index a irgendeinen festgehaltenen Ausgangszustand bedeuten.

Zur übersichtlichen Darstellung der Zusammenhänge zwischen den Geschwindigkeitskomponenten u und v und dem Druck bei einer Gitterströmung tragen wir u/a_0 als Abszisse und v/a_0 als Ordinate auf (Abb. 4). Punkte konstanter Geschwindigkeit $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ liegen dann auf Kreisen um

[1] Hütte, 27. Aufl. Berlin. Wilhelm Ernst u. Sohn 1941, S. 517.

[2] Für die Berechnung und Aufzeichnung der Schaubilder danke ich Herrn Dr. *Krahn*.

den Nullpunkt. Ein Fahrstrahl nach irgendeinem Punkt des Schaubildes gibt Größe und Richtung der Geschwindigkeit w an. Abszisse und Ordinate sind die Komponenten u und v von w. Da zu jedem Wert von w/a_0 ein bestimmter Wert von p/p_0 gehört, so liegen die Punkte konstanten Druckes auf Kreisen um den Nullpunkt. In Abb. 5 ist eine Schar solcher Kreise mit dem Parameter p/p_0 dargestellt. Wir können demnach aus diesem Schaubild den Zusammenhang der Größen u/a_0, v/a_0, w/a_0, φ, p/p_0 ersehen. Wenn zwei dieser Größen, die voneinander unabhängig sind, gegeben sind, können wir die übrigen daraus ablesen. Auch hier ist der Kreis mit dem Radius $w/a_0 = 0{,}913$ bei dem w gerade mit der Schallgeschwindigkeit übereinstimmt, gestrichelt hervorgehoben.

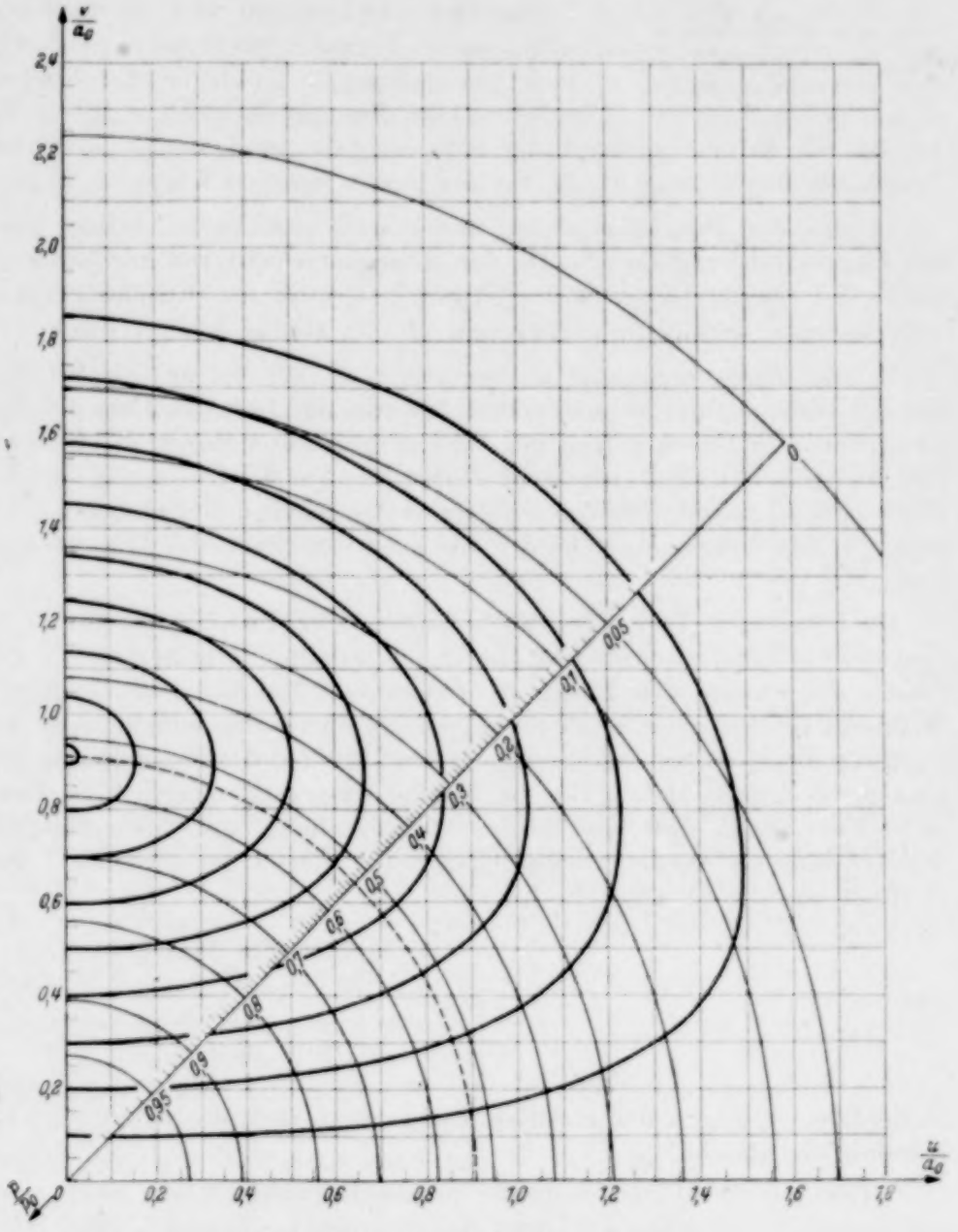


Abb. 5. Leitlinien für die Zustandsänderungen.

Bei konstanter Dichte wäre beim Durchgang durch das Gitter die Geschwindigkeitskomponente v konstant. Wir würden uns daher in dem Schaubild jeweils von dem Ausgangswert u_1, v_1 auf einer Parallelen zur Abszissenachse weiterbewegen. Da nun aber wegen der mit dem Druck p veränderlichen Dichte sich die Geschwindigkeit v gemäß (11) ändert, so bewegen wir uns auf einer Kurve, die auf Grund von (11) leicht zu berechnen ist. In Abb. 5 ist nun eine Schar solcher Kurven mit dem Parameter v_a/a_0 eingetragen, wobei v_a jetzt der Wert von v im Unterschallgebiet ist, welcher der Tangentialgeschwindigkeit $u = 0$ entspricht.

Wenn wir von irgendeinem Anfangszustand vor dem Gitter u_1, v_1, p_1 ausgehen, so können wir aus dem Schaubild ohne Mühe die Werte hinter dem Gitter finden, wenn wir eine dieser Größen, z. B. u_2, festlegen. Wir brauchen nur längs der durch den Ausgangspunkt gehenden Leitkurve $v_a/a_0 =$ konst. bis zu dem betreffenden neuen Wert, also etwa u_2 weiterzugehen, und können dann die übrigen Werte ablesen. Anstatt der Änderung von u_1 auf u_2 können wir aber auch die Änderung des Druckes p oder die der Strömungsrichtung $\varphi = \text{arc tg } v/u$ festlegen und erhalten in gleicher Weise die übrigen Größen.

Aus Abb. 5 ist zu ersehen, daß im Unterschallbereich einer Vergrößerung des Richtungswinkels φ eine Drucksteigerung, im Überschallbereich aber eine Druckerniedrigung entspricht. Bei der Schallgeschwindigkeit selbst fällt die Richtung der Tangente an die Leitkurve mit der Richtung der Geschwindigkeit w zusammen. In diesem Zustand gehört zu einer kleinen Geschwindigkeitsänderung keine Richtungsänderung bzw. ist schon mit einer sehr kleinen Richtungsänderung eine erhebliche Geschwindigkeitsänderung verbunden.

3. Vorgänge bei Energieverlust. Bei den bisherigen Überlegungen hatten wir vorausgesetzt, daß beim Durchströmen des Gitters kein Energieverlust, d. h. keine Umsetzung von Strömungsenergie in Wärme erfolgt. Für Vorgänge ohne Dichteänderung kann ein solcher Energieverlust in sehr einfacher Weise durch Hinzufügen eines zusätzlichen Druckabfalles p^* zur *Bernoulli*schen Gleichung berücksichtigt werden[1]. Wir erhalten dann

$$p_1 + \frac{\varrho}{2}(u_1^2 + v_1^2) = p_2 + \frac{\varrho}{2}(u_2^2 + v_2^2) + p^* . \tag{12}$$

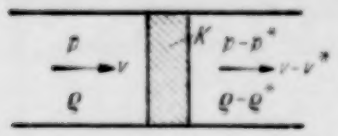


Abb. 6. Strömung durch ein Rohr mit Widerstandskörper.

Um uns die entsprechenden Verhältnisse bei Vorgängen mit merklichen Dichteänderungen klar zu machen, wollen wir zunächst einen einfacheren Vorgang betrachten (Abb. 6). In einem Rohr befinde sich ein Körper K, welcher der hindurchströmenden Flüssigkeit mechanische Energie entzieht, z. B. ein Sieb oder ein poröser Stoff. Infolge des Widerstandes dieses Körpers fällt wenigstens bei Unterschallgeschwindigkeit der Druck um den Betrag p^* ab. Ist der Druck vor dem Körper p, so ist er dahinter $p - p^*$.

Infolge der Druckabsenkung findet auch eine Verminderung der Dichte statt. Der Betrag der Dichteänderung sei ϱ^*. Da der Rohrquerschnitt vor und hinter dem Körper gleich ist und durch ihn ebensoviel zu- wie abströmt, so muß die Geschwindigkeit hinter dem Körper im umgekehrten Verhältnis größer sein als die Dichte kleiner wurde. Sie sei $v + v^*$.

Um die Zusammenhänge zu übersehen, denken wir uns die Strömung vor dem Verlustkörper aus der Ruhe verlustlos entstanden. Die ruhende Luft hat dann den Druck p_0, dessen Zusammenhang mit dem Druck p und der Geschwindigkeit v durch die Gleichung (8) bzw. durch Abb. 2 und 5 gegeben ist. Entsprechend denken wir uns die Strömung hinter dem Körper verlustlos zur Ruhe gebracht, und erhalten auf Grund der gleichen Beziehungen als Druck des ruhenden Gases $p_0 - p_0^*$. Der Druckunterschied p_0^* ist dann ein sinnvolles Maß für den Verlust an mechanischer Energie.

Da bei diesen Vorgängen nach außen keine Energie abgeführt, die Gesamtenergie vor und hinter dem Widerstandskörper also gleich sein muß, erhalten wir für diesen Zustand des ruhenden Gases, das einmal den Druck p_0, das andere Mal den Druck $p_0 - p_0^*$ hat, gleiche Temperatur. Während bei verlustloser Druckabsenkung durch eine adiabatische Ausdehnung mit dem Druck auch die Temperatur sinkt, entsprechend der bei der Ausdehnung geleisteten Arbeit, bleibt sie hier unverändert, indem der in Wärme umgesetzte Verlust an Druckenergie das Gas gerade so viel erwärmt, daß die Temperaturabsenkung, die bei verlustloser Ausdehnung auftreten würde, dadurch wieder ausgeglichen wird. Wegen der gleichen Temperatur verhalten sich die Dichten wie die Drücke. Es ist also

$$\frac{\varrho_0 - \varrho_0^*}{\varrho_0} = \frac{p_0 - p_0^*}{p_0} \tag{13}$$

oder

$$\varrho_0^* = \frac{\varrho_0}{p_0} p_0^* . \tag{14}$$

Außerdem ist wegen der gleichen Temperatur auch die Schallgeschwindigkeit a_0 in beiden Zuständen die gleiche.

Setzen wir den Druck teilweise in Geschwindigkeit um, so erhalten wir den Zusammenhang auf Grund der Gleichung (8) und der Schaubilder 2 und 5. Wir müssen nur für die Zustände hinter dem Widerstandskörper anstatt des Verhältnisses p/p_0 jetzt $(p - p^*)/(p_0 - p_0^*)$ setzen. Uns interessiert nun, welchen Druck $p - p^*$ und welche Geschwindigkeit $v + v^*$ wir in unserem Rohr hinter dem Widerstandskörper erhalten. Wir haben dafür die Bedingung, daß hinter dem Widerstandskörper bei gleichem Rohrquerschnitt dieselbe Gasmasse abfließen muß, wie vor dem Widerstandskörper zufließt. Es muß also

$$\varrho v = (\varrho - \varrho^*)(v + v^*) \tag{15}$$

oder

$$\varrho v^* \approx v \varrho^* \tag{16}$$

sein. Dabei haben wir in (16) das Glied $\varrho^* v^*$ vernachlässigt, da wir voraussetzen wollen, daß die Energieverluste klein gegenüber den gesamten Energieumsetzungen sein sollen.

---

[1] *A. Betz*, Tragflügel und hydraulische Maschinen. Handb. d. Phys. Bd. VII. S. 234. Berlin 1927.

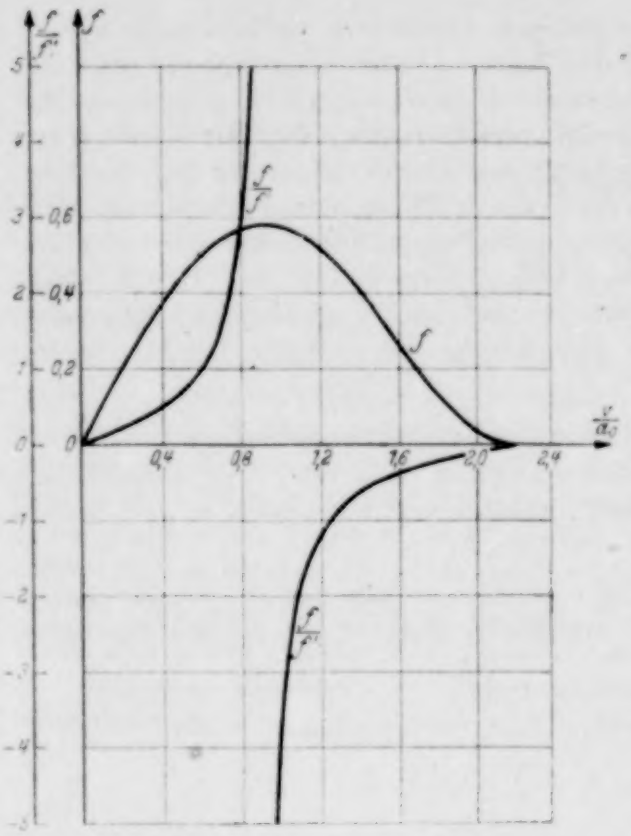


Abb. 7. Verlauf der Funktion $f = \frac{\varrho v}{\varrho_0 a_0}$ und von f/f'.

Da bei verlustloser Umsetzung ϱ/ϱ_0 nach (8) von v/a_0 abhängt, ist auch

$$\frac{\varrho v}{\varrho_0 a_0} = f\left(\frac{v}{a_0}\right) \tag{17}$$

allgemein als Funktion von v/a_0 darstellbar. Abb. 7 zeigt diesen Zusammenhang. Das Produkt ϱv und die Schallgeschwindigkeit a_0 sind vor und hinter dem Körper unverändert, aber ϱ_0 geht hinter dem Körper in $\varrho_0 - \varrho_0^*$ über. Dementsprechend wird die als Funktion von v/a_0 darstellbare Größe $\varrho v/\varrho_0 a_0$ im Verhältnis $\varrho_0/(\varrho_0 - \varrho_0^*)$ größer. Ist vor dem Widerstandskörper $\varrho v/\varrho_0 a_0 = f(v/a_0)$ gegeben, so ist hinter ihm

$$\left.\begin{aligned} f + f^* = f\left(\frac{v+v^*}{a_0}\right) &= \frac{(\varrho-\varrho^*)(v+v^*)}{(\varrho_0-\varrho_0^*)a_0} = \frac{\varrho v}{\varrho_0 a_0}\,\frac{\varrho_0}{\varrho_0-\varrho_0^*} \\ &= f\left(\frac{v}{a_0}\right)\frac{p_0}{p_0-p_0^*} \approx f\left(\frac{v}{a_0}\right)\left(1+\frac{p_0^*}{p_0}\right). \end{aligned}\right| \tag{18}$$

Damit wird

$$\frac{f^*}{f} \approx \frac{p_0^*}{p_0} \tag{19}$$

Wenn wir auf der Kurve $f(v/a_0)$ von einem Ausgangspunkt f_1 zu einem Punkt $f_2 = f_1 + f^*$ übergehen, so erhalten wir als geänderte Abszisse $v_2/a_0 = (v_1 + v^*)/a_0$. Da im allgemeinen die Änderungen p^*, v^* usw. klein gegenüber p_0, a_0 usw. sind, so können wir meist

$$f^* \approx \frac{v^*}{a_0}\,\frac{df}{dv^*/a_0} = \frac{v^*}{a_0} f' \tag{20}$$

setzen. Wir erhalten dann

$$\frac{v^*}{a_0}\,\frac{f'}{f} \approx \frac{p_0^*}{p_0}, \qquad \frac{v^*}{a_0} \approx \frac{p_0^*}{p_0}\,\frac{f}{f'}. \tag{21}$$

Die Funktion f/f' ist in Abb. 7 gleichfalls eingetragen. Sie ist im Unterschallbereich positiv, im Überschallbereich negativ und wird bei der Schallgeschwindigkeit ∞. Dementsprechend erhalten wir hinter dem Widerstandskörper eine erhöhte Geschwindigkeit, wenn die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit, eine erniedrigte Geschwindigkeit, wenn sie größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Mit Geschwindigkeiten sehr nahe der Schallgeschwindigkeit ist ein Durchfluß nicht ohne weiteres möglich. Dies hängt damit zusammen, daß der Widerstandskörper ja eine Querschnittsverengung darstellt. Wenn er z. B. als Drahtsieb ausgebildet ist, so wird der Querschnitt an dieser Stelle durch die Drähte verengt. Nun kann man aber, wie von den Vorgängen in der Lavaldüse bekannt ist, an der engsten Stelle die Geschwindigkeit nicht über die Schallgeschwindigkeit hinaus steigern.

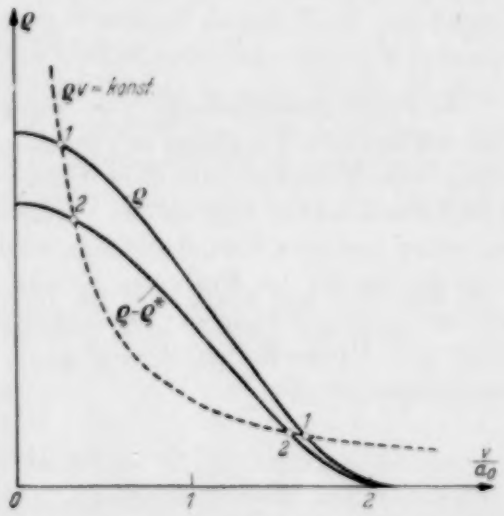


Abb. 8. Abhängigkeit der Dichte vor und hinter dem Widerstandskörper von der Geschwindigkeit v.

Es erscheint zunächst verwunderlich, daß bei Überschallgeschwindigkeit der Energieverlust eine Geschwindigkeitsverminderung und im Zusammenhang damit eine Drucksteigerung zur Folge hat. Zur Erläuterung dieses Sachverhaltes kann Abb. 8 dienen. Hier ist ϱ abhängig von v/a_0 für adiabatische Vorgänge aufgetragen. Da ϱ/ϱ_0 eine bestimmte Funktion von v/a_0 ist, so erhalten wir für ϱ selbst eine affine Kurve mit dem Parameter ϱ_0. Die beiden eingezeichneten Kurven mögen den Zusammenhang vor und hinter dem Widerstandskörper, also die Kurven mit den Endwerten ϱ_0 und $\varrho_0 - \varrho_0^*$ darstellen. Die Kontinuitätsbedingung $\varrho v = \text{konst.}$ ergibt Hyperbeln, von der als Beispiel eine gestrichelt gezeichnet ist. Wenn wir von einem Zustand 1

vor dem Körper zu dem Zustand 2 hinter dem Körper übergehen, wandern wir in diesem Schaubild längs der Hyperbel von ihrem Schnittpunkt mit der Kurve ϱ zum Schnittpunkt mit der Kurve $\varrho - \varrho^*$. Im Unterschallbereich ergibt dies eine starke Dichteverminderung und eine geringe Geschwindigkeitssteigerung, im Überschallbereich eine starke Geschwindigkeitsverringerung und eine geringe Dichteerhöhung. Ob ein solcher Übergang mit Drucksteigerung bei Energieverlust immer zu verwirklichen ist, mag dahingestellt sein. Ist der Widerstandskörper ein Sieb, so ist die Drucksteigerung verständlich, weil die Drähte des Siebes zunächst eine Querschnittsverengung darstellen, in welcher adiabatisch bei Überschallgeschwindigkeit der Druck steigt und die Geschwindigkeit sinkt. Das bei der Wiedererweiterung des Querschnittes auftretende Totwasser hinter den Drähten verhindert die volle Erweiterung, so daß ein Überdruck bestehen bleibt.

Nach diesen grundsätzlichen Überlegungen können wir die Ergebnisse derselben auf unsere Gitterströmung anwenden. Wenn wir die Gesamtgeschwindigkeit $w_2 = \sqrt{v_2^2 + u_2^2}$ hinter dem Gitter verlustlos auf die Geschwindigkeit Null aufstauen, erhalten wir den Druck $p_0 - p_0^*$, wobei p_0^* den Verlust im Gitter darstellt.

Lenken wir die Strömung vor und hinter dem Gitter verlustlos so um, daß die Geschwindigkeit u verschwindet, so bewegen wir uns in Abb. 5 auf zwei der Leitkurven $r(p/p_0)$ und erreichen an der Ordinatenachse die Werte r_{1a} und

$$r_{2a} = r_{1a} + r_a^* . \tag{22}$$

Nach (21) ist dabei

$$\frac{r_a^*}{a_0} \approx \frac{p_0^*}{p_0} \frac{f}{f'} . \tag{23}$$

Infolge des Verlustes im Gitter gehen wir also von einer Kurve $r(p/p_0)$ vor dem Gitter zu einer anderen hinter dem Gitter über. Die Größe dieser Verschiebung der Leitkurve ist uns bei gegebenem Verlust p_a^* an ihrem Beginn an der Ordinatenachse durch die Beziehung (22) und (23) gegeben. Da f/f' eine Funktion der Geschwindigkeit r_a ist, bei welcher der Verlust eintritt, so müßte man den Verlauf der Verluste im Gitter abhängig von dem Geschwindigkeitsverlauf berücksichtigen. Da aber die Änderung der Geschwindigkeitskomponente selbst nur klein ist, so ist es im allgemeinen unwesentlich, ob man die Geschwindigkeit vor oder hinter dem Gitter oder einen Mittelwert zugrunde legt.

Damit können wir aus Abb. 5 zu gegebenen Größen r_1, u_1, p_1 vor dem Gitter die entsprechenden Werte hinter ihm ablesen, wenn wir einen davon sowie den Verlust p_a^* vorgeben.

Die Kräfte auf den Flügel, entsprechend (4) und (5) bei konstanter Dichte, ergeben sich für elastische Gase zu

$$p_x = \varrho_1 v_1 (u_1 - u_2)\, t , \tag{24}$$

$$p_y = [(p_1 - p_2) + \varrho_1 v_1 (v_1 - v_2)]\, t . \tag{25}$$

4. Zusammenfassung. Der Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit läßt sich für verlustlose Vorgänge in einem bequem zu übersehenden Schaubild (5) darstellen. Der Übergang vom Zustand vor dem Gitter zum Zustand hinter dem Gitter erfolgt in dem Schaubild längs bestimmter Leitlinien. Verluste im Gitter können durch den Übergang von einer Leitlinie zu einer anderen berücksichtigt werden. Die Änderung des Parameters v_a/a_0 der Leitlinie hängt von der Größe des Verlustes p_a^* und von der Normalkomponente v der Durchflußgeschwindigkeit ab und ist auf Grund der Gleichungen (22) und (23) und Abb. 7 zu ermitteln. Bemerkenswert ist, daß bei Überschallgeschwindigkeit der Normalkomponente der Energieverlust eine Drucksteigerung ergibt.

(Eingegangen am 14. Juni 1947.)

Ein neues Kriterium für den Verlauf der Dampfdruckkurve am kritischen Punkt.

Von **R. Plank** und **L. Riedel** in Karlsruhe.

1. Einleitung. Seit den Anfängen der Thermodynamik hat man sich immer wieder intensiv bemüht, Gesetzmäßigkeiten aufzufinden, die eine möglichst sichere Vorausberechnung der Dampfdruckkurven solcher Stoffe ermöglichen sollen, für die keine oder nur vereinzelte Meßwerte vorliegen. Das hierher gehörige Schrifttum ist kaum übersehbar und schwillt von Jahr zu Jahr weiter an. Fragt man jedoch nach dem Enderfolg dieser vielfältigen Bemühungen, so kommt man zu der erstaunlichen Feststellung, daß die grundlegenden Erkenntnisse alle bereits in der klassischen Zeit gefunden wurden, während die zahllosen neueren Arbeiten kaum Ergebnisse von bleibendem Wert zutage förderten.

Den sicheren thermodynamischen Ausgangspunkt für die Aufstellung einer brauchbaren Dampfdruckformel bildet die *Clausius-Clapeyron*sche Gleichung, die unter den bekannten vereinfachenden Annahmen auf folgende Form der Dampfdruckkurve führt, die sich heute aus theoretischen Erwägungen und praktischen Gründen ziemlich allgemein durchgesetzt hat:

$$\ln P = A - \frac{B}{T} + C \ln T + D T + E T^2 + F T^3 + \ldots \tag{1}$$

Während man für rohe Abschätzungen bzw. innerhalb kleiner Temperaturintervalle mit den Gliedern $A - B/T$ auskommt, erfordert die genaue Darstellung bis zum kritischen Punkt die Verwendung von mindestens vier Gliedern, deren Koeffizienten den vorliegenden Messungen möglichst gut angepaßt werden müssen. Es liegt nun ganz im Sinne unserer obigen Ausführungen, daß man heute noch keine eindeutige Antwort auf die Frage geben kann, welche weiteren Glieder man zweckmäßigerweise hinzufügen muß, um mit möglichst wenigen Konstanten eine möglichst gute Anpassung an die Messungen zu erzielen. So findet man im Schrifttum häufig neben den Gliedern $A - B/T$ die Fortsetzung $C \ln T + D T$, aber ebenso oft auch $D T + E T^2$, während höhere oder gebrochene Potenzen der absoluten Temperatur wohl aus Gründen der praktischen Rechnung seltener verwendet werden.

Vergleicht man aber den Verlauf einer gemessenen Dampfdruckkurve mit einer dieser Formeln, so muß man feststellen, daß diese trotz günstiger Wahl der Koeffizienten den Meßwerten keineswegs gerecht werden. Die Kurve der Abweichungen zwischen den nach der Formel berechneten und den gemessenen Dampfdrücken in Abhängigkeit von der Temperatur geht natürlich in jedem Fall an den vier zur Berechnung der Koeffizienten verwendeten Punkten durch Null, schmiegt sich aber im Ganzen der Temperaturachse nicht glatt an, sondern zeigt zwischen diesen Punkten beträchtliche systematische Ausbiegungen, die darauf hinweisen, daß sich diese Formeln den Meßwerten nur gewaltsam aufzwingen lassen. Offenbar kommt es darauf an, eine Gleichung zu finden, die auch in den Ableitungen dem wahren Verlauf der Dampfdruckkurven möglichst gut angepaßt ist. So wird man zwangsläufig zunächst auf die Untersuchung der Ableitung des Dampfdruckes nach der Temperatur geführt.

2. Die logarithmische Ableitung der Dampfdruckkurve. Statt des gewöhnlichen Differentialquotienten dP/dT empfiehlt sich aus verschiedenen Gründen die Betrachtung der Größe

$$\alpha = \frac{T\,dP}{P\,dT} = \frac{d \log P}{d \log T}, \tag{2}$$

die wir im folgenden auch kurz als α-Wert bezeichnen wollen. Diese Größe ist dimensionslos und daher von den gewählten Maßeinheiten unabhängig. Aus demselben Grunde sollte α nach dem Theorem der übereinstimmenden Zustände eine universelle, d. h. für beliebige Stoffe übereinstimmende Funktion der reduzierten Temperatur $\vartheta = T/T_k$ sein. (Der Index k soll stets den kritischen Zustand kennzeichnen.) Weiterhin besitzt α unmittelbar eine physikalische Bedeutung, denn nach der *Clausius-Clapeyron*schen Gleichung wird

$$\alpha = \frac{r}{P(v'' - v')} = \frac{r}{\varphi}. \tag{3}$$

Das heißt: a stellt das Verhältnis der Verdampfungswärme r zur äußeren Verdampfungsarbeit ψ dar, und sein reziproker Wert läßt sich in gewissem Sinn als Nutzeffekt des Verdampfungsprozesses (Verhältnis der gewonnenen Arbeit zur aufgewendeten Wärmemenge) auffassen.

Vernachlässigt man am normalen Siedepunkt T_s das Volum v' der Flüssigkeit gegenüber v'' des Dampfes und wendet man auf diesen die Zustandsgleichung des idealen Gases an, so erkennt man sofort, daß a_s in engster Beziehung zur Verdampfungsentropie am Siedepunkt steht, die nach der *Troutons*chen Regel für normale Stoffe einen Wert von etwa 21 cal/Mol Grad aufweist, so daß

$$a_s = \frac{r_s}{R\,T_s} = 10{,}6\,. \tag{4}$$

Da die reduzierte Siedetemperatur $\vartheta_s = T_s/T_k$ für normale Stoffe übereinstimmend in der Nähe von 0,64 liegt, steht die universelle Größe von a_s in Einklang mit dem Theorem der übereinstimmenden Zustände. Dieses verlangt auch für den kritischen Punkt einen universellen Wert von a_k, der in der Tat für eine große Anzahl von nicht assoziierten Stoffen in der Nähe von 7 gefunden wurde.

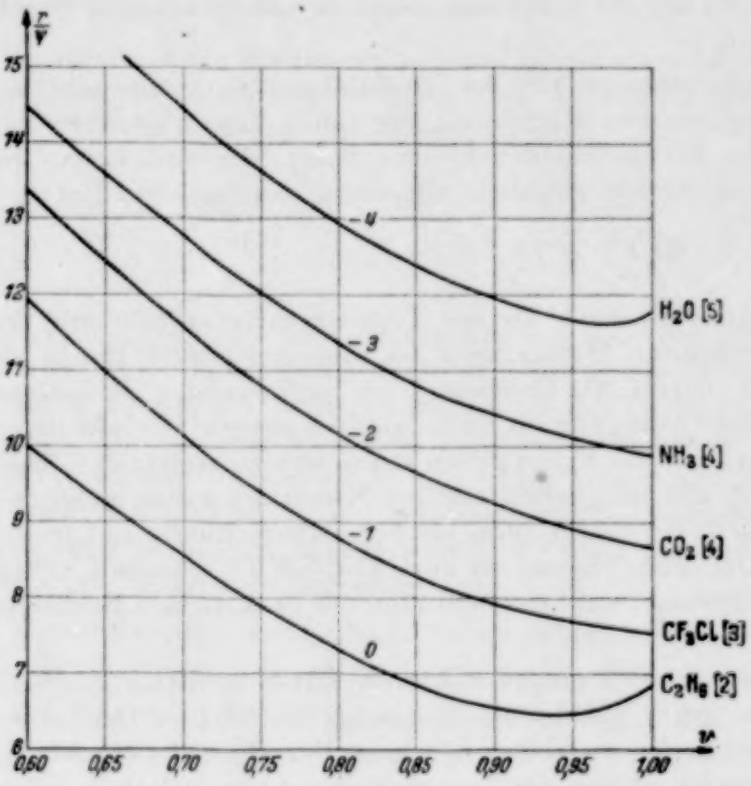


Abb. 1. $a = r/\psi$, berechnet auf Grund von Dampftafeln, in Abhängigkeit von der reduzierten Temperatur $\vartheta = T/T_k$. (Die den Kurven beigeschriebenen Zahlen sind von den abgelesenen Ordinaten abzuziehen, um a zu erhalten. Die neben den Stoffsymbolen angegebenen Zahlen bezeichnen die als Fußnoten gegebenen Schrifttumsquellen.)

Während diese Zusammenhänge schon lange bekannt sind und in zahlreichen Arbeiten geprüft und verbessert wurden, scheint man sich mit dem Temperaturverlauf von a, der für die Form der Dampfdruckgleichung natürlich von größter Bedeutung ist, nur wenig beschäftigt zu haben. In seiner „Thermodynamik" aus dem Jahre 1887 macht *Bertrand*[1] auf Grund einer Bearbeitung der Dampftafeln verschiedener Stoffe den Ansatz: $1/a = a\,T - b$, und zeigte, daß für viele Stoffe angenähert $b = 0{,}02$ gesetzt werden kann. Durch Differentiation der üblichen Dampfdruckformel (1) erhält man dagegen

$$a = B/T + C + D\,T + 2\,E\,T^2 + 3\,F\,T^3 + \ldots \tag{5}$$

Die ersten Glieder ergeben somit für a einen hyperbolischen Abfall mit steigender Temperatur, der jedoch bei Hinzunahme weiterer Glieder je nach Vorzeichen und Größe der einzelnen Koeffizienten mannigfach verändert werden kann. Um einen klaren Einblick in den tatsächlichen Verlauf der Temperaturkurve von a zu gewinnen, ist es offenbar notwendig, auf empirische Unterlagen zurückzugreifen.

3. Das neue Kriterium. Als einfachsten Zugang zur Bestimmung des Verlaufes der a-Kurven bieten sich zunächst die für eine Anzahl von technisch bedeutsamen Stoffen berechneten Dampftafeln dar, in denen die zur Berechnung von a nach Gleichung (3) notwendigen Größen für verschiedene Temperaturen zusammengestellt sind. Abb. 1 enthält die auf diese Weise gewonnenen Kurven für einige Stoffe, für die Dampftafeln bis zum kritischen Punkt vorliegen. Als unabhängige Veränderliche wurde dabei die reduzierte Temperatur $\vartheta = T/T_k$ gewählt, wodurch ein unmittelbarer Vergleich der verschiedenen Kurven gemäß dem Theorem der übereinstimmenden Zustände möglich wird. Da die Kurven tatsächlich weitgehend zusammenfallen, wurden sie in Abb. 1 zur Erzielung einer besseren Übersicht durch Verschiebung des Ordinatenmaßstabes um je eine Einheit künstlich auseinandergezogen.

---

[1] *Bertrand*, Thermodynamique, S. 157. Paris 1887.
[2] *R. Plank* und *J. Kambeitz*, Z. ges. Kälteind. 43 (1936), S. 209 und 233.
[3] *L. Riedel*, Z. ges. Kälteind. 48 (1941), S. 9 und 89.
[4] VDI.-Kältemaschinen-Regeln, 4. Aufl. (erscheint demnächst).
[5] *W. Koch*, VDI.-Wasserdampftafeln. Berlin 1937.

Sehr auffällig ist der Verlauf in der Nähe der kritischen Temperatur $\vartheta = 1$. Während a für CF_3Cl, CO_2 und NH_3 bis zum kritischen Punkt dauernd, allerdings mit zunehmender Temperatur immer langsamer abfällt, besitzen die Kurven für C_2H_6 und H_2O bereits unterhalb der kritischen Temperatur ein Minimum. Da nun der Verlauf von a nach dem Theorem der übereinstimmenden Zustände universell sein müßte, erscheint es sehr unwahrscheinlich, daß die Kurven für die verschiedenen Stoffe tatsächlich derartige qualitative Unterschiede aufweisen sollen. Viel wahrscheinlicher dürfte es sein, daß diese Unterschiede durch geringe Ungenauigkeiten der Meßergebnisse bzw. der zur Berechnung der Dampftafeln aufgestellten Interpolationsformeln bedingt sind. In der Tat deutet der Verlauf der Kurven für CF_3Cl, CO_2 und NH_3 ebenfalls auf ein Minimum hin, das für diese Stoffe allerdings erst jenseits der kritischen Temperatur erreicht würde, und dem daher natürlich keine reelle Bedeutung zugesprochen werden kann.

Die Vermutung liegt jedenfalls nahe, daß es sich hier um eine bisher nicht klar erkannte, für beliebige Stoffe gültige Gesetzmäßigkeit handelt, die wir als eine noch eingehend zu prüfende Hypothese in folgender Form aussprechen können:

Die a-Kurve besitzt am kritischen Punkt ein Minimum.

Mathematisch formuliert:

$$\left(\frac{da}{dT}\right)_k = 0\,. \tag{6}$$

Hierdurch wird offenbar eine wichtige Aussage über den Verlauf der Dampfdruckkurve am kritischen Punkt gemacht. Führt man die Differentiation von a nach (2) durch, so ergibt sich auf Grund des neuen Kriteriums (6) für die zweite Ableitung des Dampfdruckes nach der Temperatur die Beziehung

$$\left(\frac{d^2P}{dT^2}\right)_k = a_k(a_k - 1)\,\frac{P_k}{T_k^2}\,. \tag{7}$$

Bei Verwendung reduzierter Größen $\pi = P/P_k$ bzw. $\vartheta = T/T_k$ erhält man noch einfacher

$$\left(\frac{d^2\pi}{d\vartheta^2}\right)_k = a_k(a_k - 1)\,. \tag{7a}$$

Für Stoffe, deren a-Wert am kritischen Punkt gleich 7 ist, sollte somit diese reduzierte Größe den universellen Wert 42 haben.

4. Prüfung des Kriteriums auf Grund empirischer Dampfdruckformeln. Wie Gleichung (6) unmittelbar erkennen läßt, handelt es sich bei unserem Kriterium um eine Aussage über den Verlauf des zweiten Differentialquotienten der Dampfdruckkurve in der Nähe des kritischen Punktes. Nun machen sich bekanntlich die zufälligen Fehler der Einzelmessungen bei der Berechnung der ersten Ableitung einer Kurve in wesentlich stärkerem Maße bemerkbar, und eine nochmalige Verstärkung dieser Unsicherheit muß sich dann natürlich für den zweiten Differentialquotienten ergeben. Es ist daher durchaus verständlich, wenn die unter Zugrundelegung mehr oder weniger gut angepaßter Interpolationsformeln berechneten Daten der Dampftafeln keine befriedigende Grundlage zur Prüfung des neuen Kriteriums (6) abgeben. Da es sich hierbei ausschließlich um eine Aussage über den Verlauf der Dampfdruckkurve handelt, wird man vor allem den Umweg über die Verdampfungswärme und die Sättigungsvolume (vgl. Gleichung (3)) vermeiden und die Prüfung allein auf möglichst genaue Dampfdruckmessungen in der Nähe des kritischen Punktes stützen.

Das einwandfreieste Verfahren wäre offenbar, zunächst graphisch oder rechnerisch eine glatte Kurve durch die Meßpunkte zu legen, die diese ohne systematische Abweichung innerhalb der Meßgenauigkeit wiedergibt. Für die zweite Ableitung dieser Kurve sollte dann Gleichung (7) am kritischen Punkt erfüllt sein. Nun liegen derartige, die Streuung der Meßwerte ausgleichende Interpolationsformeln bereits für zahlreiche Stoffe vor, so daß es naheliegt, zu untersuchen, wie weit diese mit unserem Kriterium übereinstimmen. Zu diesem Zwecke kann man entweder durch zweimalige Differentiation der Dampfdruckkurve die Temperatur bestimmen, für die a ein Minimum annimmt. Hierfür müßte sich, wenn Gleichung (6) zutrifft, die kritische Temperatur T_k ergeben. Oder man kann $(d^2P/dT^2)_k$ sowie a_k für den kritischen Punkt berechnen und die Richtigkeit von Gleichung (7) prüfen. Auf Grund des in der Einleitung über die schlechte Anpassung der üblichen Dampfdruckformeln Gesagten wird man allerdings von vornherein von dieser Prüfung nicht allzuviel erwarten dürfen, zumal diese Formeln die gesamte Dampfdruckkurve wiedergeben sollen, und sich daher kaum, wie es für unsere Zwecke wünschenswert wäre, dem Verlauf in der Nähe des kritischen Punktes besonders eng anschmiegen können.

In der Tat erwies sich das Ergebnis derartiger Rechnungen in den meisten Fällen als völlig negativ, so daß man daraus jedenfalls keine Bestätigung des Kriteriums entnehmen kann. Die aus den Formeln berechnete Temperatur des Minimums der a-Kurve weicht meist beträchtlich von der kritischen ab, und ebenso ergeben sich Unterschiede von der Größenordnung von 10% für die Berechnung von $(d^2P/dT^2)_k$ durch unmittelbare Differentiation bzw. nach Gleichung (7). Da diese Abweichungen sowohl nach der einen wie nach der anderen Seite auftreten, wird man aber andererseits daraus auch nicht auf eine Widerlegung unseres Kriteriums schließen dürfen. Unter diesen Umständen kann auf die Wiedergabe des so bearbeiteten Materials verzichtet werden. Nur zwei Beispiele sollen das Gesagte erläutern:

Für CF_3Cl lassen sich nach *L. Riedel*[3] die Meßwerte zwischen −139° C und dem kritischen Punkt durch folgende Gleichung gut darstellen:

$$\log P = 7{,}8172 - \frac{1109{,}12}{T} - 0{,}014127\,T + 0{,}1883 \cdot 10^{-4}\,T^2 .$$

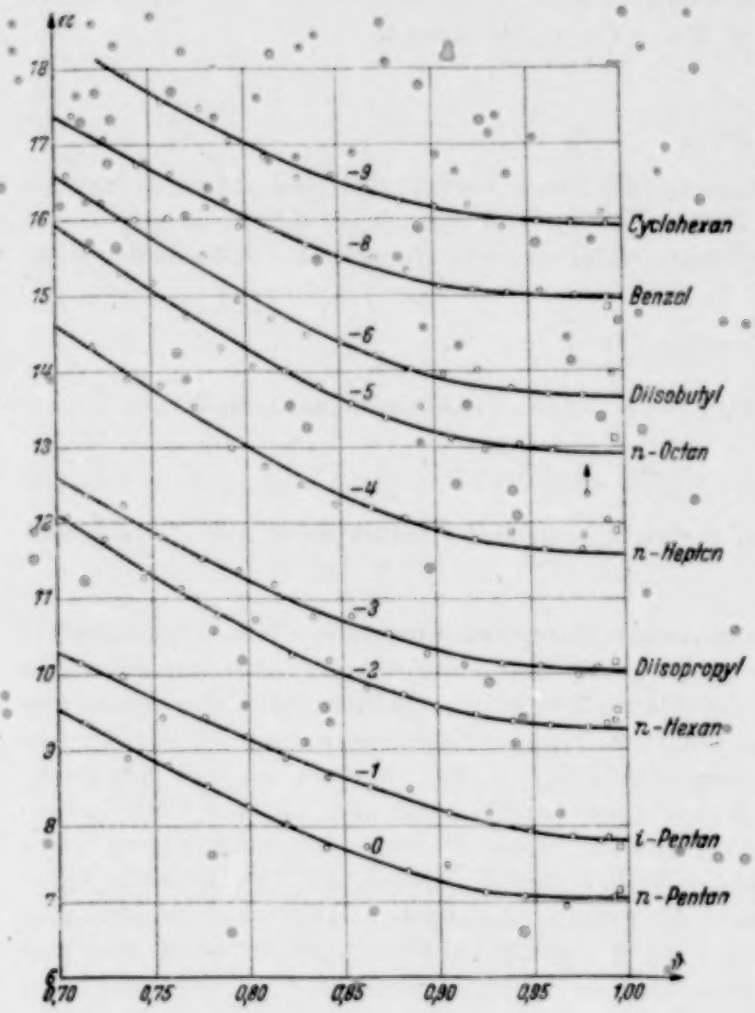


Abb. 2. a-Kurven von Kohlenwasserstoffen nach Messungen von *Young*[5].

Hiermit erhält man für das Minimum von a statt der kritischen Temperatur von etwa 302° K den wesentlich höheren Wert von 328° K, was mit der a-Kurve in Abb. 1, die auf diese Dampfdruckformel zurückgeht, übereinstimmt. Mit $a_k = 6{,}542$ ergibt sich $a_k(a_k - 1)\,P_k/T_k^2 = 0{,}0157$ ata/Grad², während die zweimalige Differentiation $(d^2P/dT^2)_k = 0{,}0146$ ata/Grad² liefert, also einen um rund 7% kleineren Wert.

Für Kohlendioxyd lautet die Gleichung der Dampfdruckkurve nach *Meyers* und *van Dusen*[6] zwischen −56,6° C (Tripelpunkt) und dem kritischen Punkt ($T_k = 304{,}2$° K; $P_k = 75{,}38$ ata)

$$\log \frac{P_k}{P} = \frac{x}{T}\,(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) .$$

Darin steht x für $T_k - T$, und es ist $a = 2{,}98426$; $b = -\,6{,}22982 \cdot 10^{-3}$; $c = 1{,}05784 \cdot 10^{-4}$; $d = 9{,}21483 \cdot 10^{-7}$ und $e = 3{,}72320 \cdot 10^{-9}$. Daraus erhält man mit $a_k = 6{,}872$ für $a_k(a_k - 1)\,P_k/T_k^2 = 0{,}0329$ ata/Grad², während $(d^2P/dT^2)_k = 0{,}0344$ wird, also um etwa 4,5% größer.

Der einzige Stoff, für den (allerdings sehr komplizierte) Dampfdruckformeln aufgestellt wurden, die sich den Meßwerten mit größter Genauigkeit anschmiegen, ist Wasser. Darauf soll in Abschnitt 6 gesondert eingegangen werden.

Da somit auch die Dampfdruckformeln keine brauchbare Grundlage zur Prüfung des Kriteriums abgeben, bleibt nur der Ausweg, unmittelbar auf die Meßwerte zurückzugreifen und diese in einer für unsere Zwecke geeigneten Form auszuwerten.

5. Prüfung des Kriteriums an Hand unmittelbar gemessener Dampfdruckwerte. Die Berechnung neuer Dampfdruckformeln, die sich den vorliegenden Messungen in der Nähe des kritischen Punktes ohne systematische Abweichungen innerhalb der Meßgenauigkeit anschmiegen, wäre außerordentlich umständlich und zeitraubend gewesen. Die Auswahl einer bestimmten Form der Interpolationsgleichung enthält auch bereits eine gewisse Willkür, die auf das Ergebnis der Prüfung von Einfluß sein könnte, so daß man jedenfalls nicht behaupten darf, daß diese Methode sich ganz allein auf die Meßdaten stütze. In diesem Sinne einwandfrei und viel bequemer

[6] *C. H. Meyers* und *M. S. van Dusen*, Refr. Eng. 13 (1926), S. 180.

ist folgendes Verfahren, das sich sehr gut bewährte und zur Prüfung des Kriteriums an zahlreichen Dampfdruckmessungen herangezogen wurde: Man bildet aus je zwei benachbarten gemessenen Punkten der Dampfdruckkurve (T_1, P_1) und (T_2, P_2) die leicht zu berechnende Größe $a_{12} = \frac{\log P_2 - \log P_1}{\log T_2 - \log T_1}$, die offenbar zu $a = \frac{d \log P}{d \log T}$ im Verhältnis des Differenzen- zum Differentialquotienten steht. Wenn man die Differenzen, d. h. den Abstand der Temperaturen nicht zu groß wählt, kann man ersteren in guter Annäherung dem Differentialquotienten für den Mittelpunkt des Temperaturintervalls: $T_{12} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ gleichsetzen. Dies gilt streng, solange man die zu differenzierende Kurve in dem betrachteten Intervall als quadratische Parabel ansehen kann. Ist das bei Verwendung zu großer Abstände der beiden Punkte nicht mehr der Fall, dann gehört der berechnete Differenzenquotient a_{12} nicht zur Intervallmitte, sondern zu einer je nach der Form der Kurve mehr oder weniger systematisch abweichenden Temperatur. Wenn man also auf diese Weise mit Hilfe berechneter Differenzenquotienten eine Kurve $a_{12} = f(T_{12})$ konstruiert, muß man bei Verwendung zu großer Temperaturintervalle mit der Möglichkeit rechnen, daß die wahre, dem Differentialquotienten entsprechende Kurve $a = f(T)$ etwas anders verläuft, da jeder Punkt der ersteren durch eine kleine seitliche Verschiebung korrigiert werden muß. Nun soll hier gezeigt werden, daß die a-Kurve am kritischen Punkt ein Minimum besitzt, also in dessen Nähe eine waagerechte Tangente hat. Diese Tatsache kann aber durch eine geringe Verschiebung der Kurvenpunkte in horizontaler Richtung nicht beeinflußt werden, d. h. unser Kriterium muß auch für die aus dem Differenzenquotienten gebildete Kurve gelten, und wenn es für diese zutrifft, ist es auch für die a-Kurve bewiesen. Daraus erkennt man jedenfalls, daß in dieser Hinsicht keine Bedenken gegen das Verfahren bestehen.

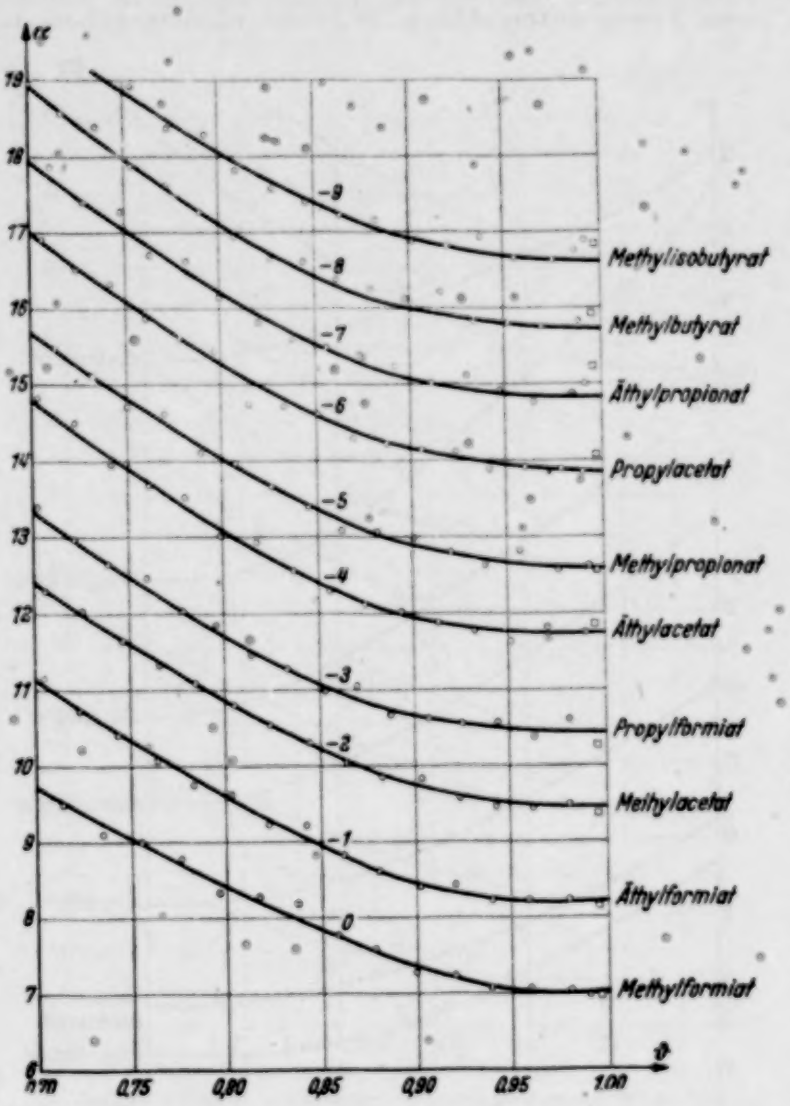


Abb. 3. a-Kurven von Estern nach Messungen von *Young*[6].

Von vornherein nicht zu beantworten war aber die Frage, ob die vorliegenden Dampfdruckmessungen eine für diese Zwecke hinreichende Genauigkeit besitzen, denn alle zufälligen Schwankungen in den Meßwerten werden bei der Differenzenbildung stark vergrößert, und zwar um so stärker, je kleiner das Temperaturintervall gewählt wird. Nun wird die Temperatur bei guten Messungen auf $\pm 0{,}01°$ genau bestimmt. Will man für a eine Genauigkeit von $1‰$ erreichen, so ist es also, ganz abgesehen von zugleich auftretenden Fehlern der Druckmessung, von vornherein zweckmäßig, das Temperaturintervall in der Größenordnung von $10°$ zu wählen. Andererseits kann man dieses Intervall gerade in der für uns wichtigen Nähe des kritischen Punktes nicht beliebig groß machen, da ja dieser auf jeden Fall den letzten Meßpunkt darstellt, und man möglichst viele Punkte der a-Kurve bis dicht an die kritische Temperatur heran haben möchte. Man sieht also, daß hier gewisse Grenzen dieses Prüfverfahrens liegen, die durch die Genauigkeit der vorliegenden Dampfdruckmessungen und die Dichte der Meßpunkte gegeben sind. In der Tat erwiesen sich einige Meßreihen als durchaus unbrauchbar, insofern als die berechneten a_{12}-Werte so starke Streuungen zeigten, daß hieraus kein eindeutiges Bild über den Verlauf der Kurve zu gewinnen war. Dies gilt beispielsweise auch für die Messungen von *Porter*[7] an Aethan.

[7] *F. Porter*, J. Amer. Chem. Soc. 48 (1926) S. 2055.

auf die letzten Endes auch die in Abb. 1 dargestellte a-Kurve zurückgeht. Man wird hierfür aber nicht unsere Methode verantwortlich machen dürfen, sondern kann wohl sagen, daß bei stärker streuenden Messungen der Verlauf der a-Kurve so unsicher festgelegt ist, daß auch kein anderes Verfahren eine eindeutige Aussage über den zweiten Differentialquotienten herausholen könnte.

Auf diese Weise wurden alle von vornherein brauchbar scheinenden, uns zur Zeit zugänglichen Dampfdruckmessungen bis zum kritischen Punkt bearbeitet. Deren Zahl ist keineswegs sehr groß. Von entscheidender Bedeutung war daher die Frage, ob die zahlreichen Messungen von S. *Young*[8] und Mitarbeitern unseren Anforderungen an die Genauigkeit genügen würden. Dies war in der Tat der Fall, so daß damit ein reiches empirisches Material für unsere Zwecke zur Verfügung stand. In den Abb. 2, 3, 4 sind die als Differenzenquotienten berechneten a-Werte von 26 der von *Young* untersuchten 30 Stoffe wiedergegeben, während bei den restlichen vier Stoffen das für uns allein wichtige Gebiet nahe am kritischen Punkt fehlt. Auch in diesen Abbildungen diente wie in Abb. 1 die reduzierte Temperatur als Abszisse und wurden die nahe aufeinanderfallenden Kurven durch Verschiebung des Ordinatenmaßstabes um einen den Kurven beigeschriebenen Betrag voneinander getrennt. *Young* gibt als Ergebnis seiner Messungen im allgemeinen die Dampfdrucke für runde, um je 10° fortschreitende Celsiustemperaturen an, womit das für die Differenzenbildung auszuwählende Intervall bereits gegeben war. Es ist einerseits klein genug, um genügend viele Punkte der a-Kurve zu liefern und eine Gleichsetzung des Differenzen- mit dem Differentialquotienten zu gestatten; andererseits aber auch groß genug, um genügend sichere a-Werte zu liefern und damit ein klares Bild vom Kurvenverlauf zu geben. Für einzelne Stoffe gibt *Young* in der Nähe des kritischen Punktes die Dampfdrucke auch in engeren Temperaturabständen an, so daß in diesem für uns wichtigen Gebiet eine größere Anzahl von a-Werten berechnet werden konnte. Auch in diesen Fällen wurde das Temperaturintervall zwischen etwa 5 und 10° gewählt, wozu natürlich einzelne Meßpunkte bei dichteren Meßreihen übersprungen werden mußten. So war es möglich, durch geeignete Kombination der Angaben gerade in der Nähe des kritischen Punktes für einzelne Stoffe mehrere a-Werte zu berechnen, die stets zur Mitte des dabei verwendeten Temperaturintervalls eingetragen wurden. Der in den Abbildungen als Quadrat eingezeichnete, der kritischen Temperatur $\vartheta = 1$ am nächsten liegende Punkt wurde unter Verwendung der angegebenen kritischen Daten berechnet und dürfte im allgemeinen wegen des kleineren Temperaturintervalls eine geringere Genauigkeit beanspruchen als die anderen Punkte. Die Betrachtung der Abbildungen zeigt, daß sich auf diese Weise im allgemeinen glatte Kurven ergeben, daß es aber sinnlos wäre, etwa durch Vergrößerung des Ordinatenmaßstabes eine größere Genauigkeit der Prüfung erzielen zu wollen. Daher konnte bei der zahlenmäßigen Berechnung auch ohne Bedenken ein gewöhnlicher Rechenschieber verwendet werden.

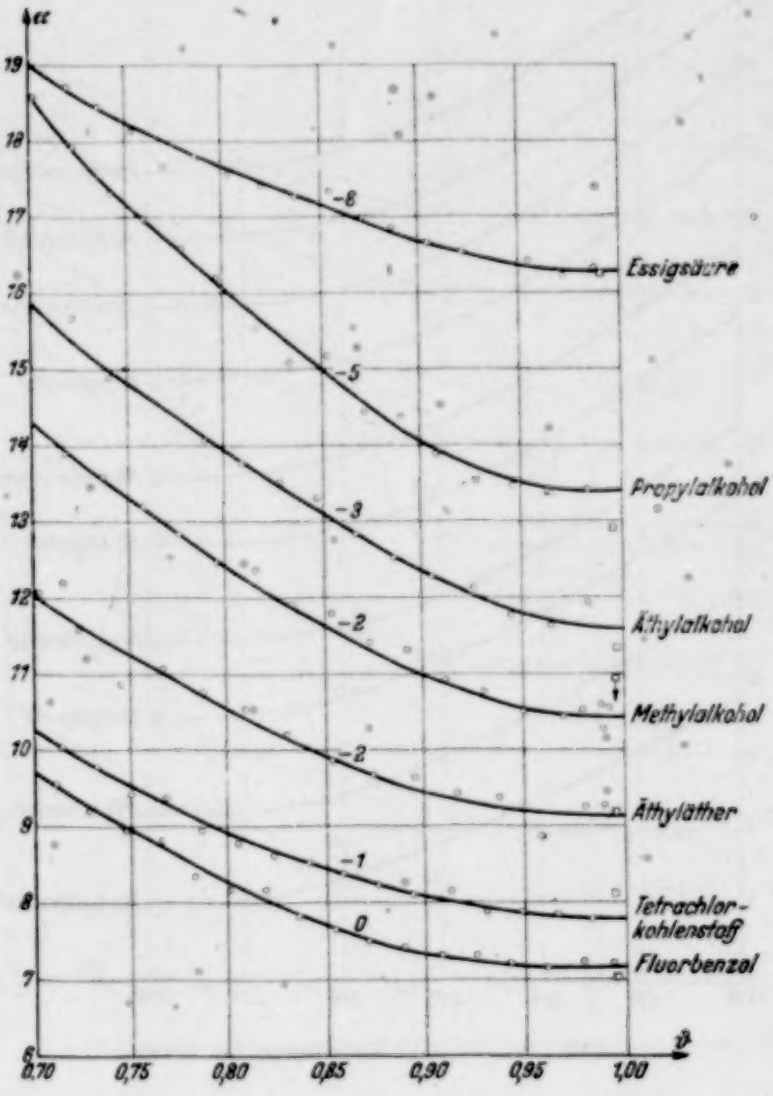


Abb. 4. a-Kurven verschiedener Stoffe nach Messungen von *Young*[8].

[8] S. *Young*, Scient. Proc. Roy. Dublin Soc. 12 (1910) S. 374.

Betrachtet man diese Abbildungen nun im Hinblick auf unser Kriterium, welches ein Minimum der α-Kurve für $\vartheta = 1$ fordert, so wird man ohne jede Voreingenommenheit sagen dürfen, daß dies jedenfalls innerhalb der durch die Meßgenauigkeit gegebenen Grenzen der Fall ist. Es gibt eine ganze Anzahl von Stoffen, für die die α-Werte in der Nähe des kritischen Punktes nur ganz wenig streuen, so daß hier der Kurvenverlauf klar gegeben ist. Hierzu gehören aus Abb. 2 insbesondere Isopentan und Benzol, aus Abb. 3 Methyl- und Äthylformiat sowie Methylacetat, aus Abb. 4 Fluorbenzol und Essigsäure. In allen diesen Fällen ist tatsächlich am kritischen Punkt ein flaches Minimum vorhanden, aber auch der Gesamtverlauf der Kurven für die anderen Stoffe scheint dies zu bestätigen, mindestens in keinem Falle dem zu widersprechen.

Abb. 5 gibt schließlich die entsprechenden Kurven für neun weitere Stoffe wieder, für die zuverlässige (zum großen Teil aus dem Leidener Kältelaboratorium stammende) Dampfdruckmessungen vorliegen. Bei den niedrig siedenden Gasen schrumpft der absolute Temperaturbereich wesentlich zusammen, so daß zur Erzielung einer ähnlich großen Genauigkeit und Dichte der α-Werte wie bei den von *Young* untersuchten, hochsiedenden Stoffen die Genauigkeit der Temperaturmessung und die Dichte der Meßwerte entsprechend größer sein müßten. Beides ist tatsächlich nicht der Fall, so daß man hier von vornherein mit einer geringeren Anzahl von Punkten und größeren Streuungen zu rechnen hat. Um so bemerkenswerter ist das in Abb. 5 dargestellte Ergebnis, welches beweist, daß die zugrundeliegenden Messungen, abgesehen von einigen Ausnahmen, ganz vorzüglich sind und eine weitere klare Bestätigung des Kriteriums liefern. Besonders hervorgehoben sei das Ergebnis dieser Prüfung an Kohlenoxyd, für das gerade in der Nähe des kritischen Punktes eine größere Anzahl sehr genauer Dampfdruckmessungen gemacht wurde[14].

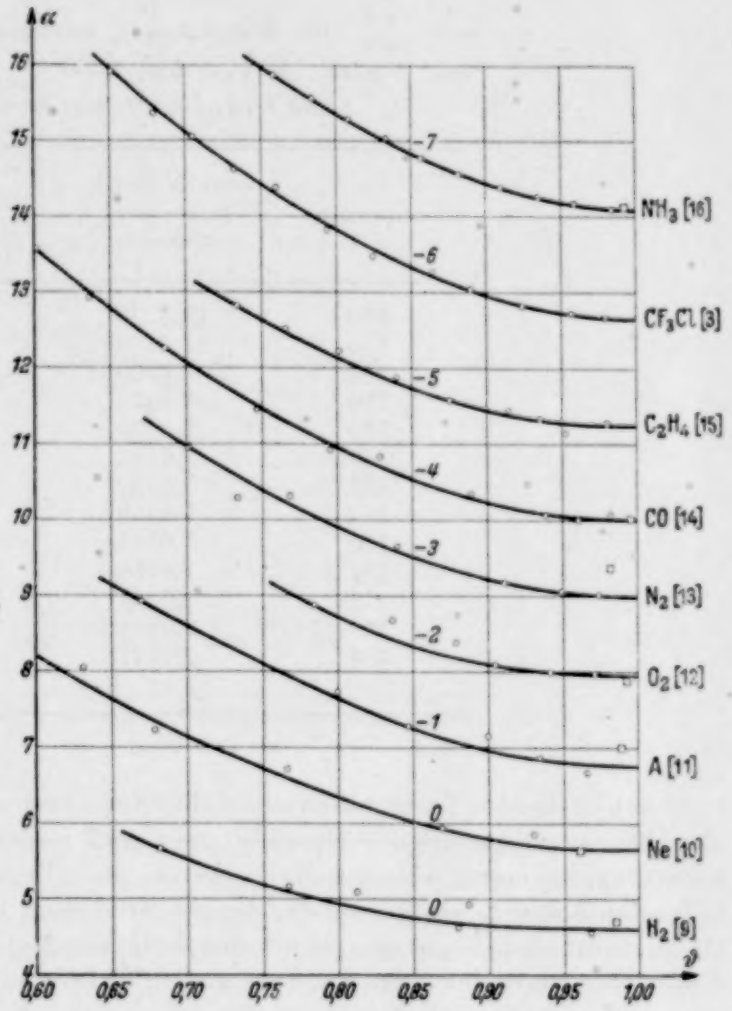


Abb. 5. α-Kurven verflüssigter Gase nach Messungen verschiedener Herkunft. (Vgl. Unterschrift zu Abb. 1.)

Insgesamt darf man wohl sagen, daß durch diese unmittelbar auf die Meßdaten zurückgreifende Bestimmung der α-Kurven das fragliche Kriterium innerhalb der durch die Meßgenauigkeit gegebenen Grenzen bestätigt wird. Dies gilt offenbar auch für assoziierte Stoffe, wie die Kurven für die Alkohole und Essigsäure zeigen, deren nicht normales Verhalten durch einen von den sonstigen Kurven abweichenden Verlauf zum Ausdruck kommt.

6. Der Fall Wasser. Der einzige Stoff, dessen Dampfdruckkurve bis zum kritischen Punkt mit der heute überhaupt erreichbaren größten Sicherheit bekannt sein dürfte, ist Wasser. Außer

[9] *P. G. Cath* und *H. Kamerlingh Onnes*, Comm. Leiden Nr. 152a (1917).
[10] *P. G. Cath* und *Kamerlingh Onnes*, Comm. Leiden Nr. 152b (1917).
[11] *C. A. Crommelin*, Comm. Leiden Nr. 138c (1913).
[12] *H. Kamerlingh Onnes*, *C. Dorsmann* und *G. Holst*, Comm. Leiden Nr. 145b (1914).
[13] *C. A. Crommelin*, Comm. Leiden Nr. 145d (1914).
[14] *C. A. Crommelin*, *W. J. Bijleveld* und *E. G. Brown*, Comm. Leiden Nr. 217 (1931).
[15] *C. A. Crommelin* und *H. G. Watts*, Comm. Leiden Nr. 189b (1927).
[16] *J. A. Beattie* und *C. K. Lawrence*, J. Amer. Chem. Soc. 52 (1930) S. 13.

den Messungen von *Holborn* und *Baumann*[17] aus dem Jahre 1910 liegen drei neuere, unabhängige Meßreihen[18], [19], [20] von höchster Genauigkeit vor, die untereinander vorzüglich übereinstimmen, so daß eine Prüfung unseres Kriteriums an Hand dieser Ergebnisse besonders aussichtsreich erscheint. Es wurden auch sehr komplizierte Interpolationsformeln aufgestellt, die tatsächlich diese Messungen mit einer erstaunlichen Genauigkeit wiederzugeben vermögen, so daß man versucht sein könnte, auch auf Grund dieser Gleichungen das Kriterium zu prüfen. Folgende Zahlentafel zeigt allerdings, daß auch hier das in Abschnitt 4 Gesagte zutrifft: Trotz bester Übereinstimmung der Dampfdrucke bis zur kritischen Temperatur (374,11°), werden die Abweichungen in der ersten Ableitung in der Nähe des kritischen Punktes doch schon beachtlich, und die Unsicherheit in der zweiten Ableitung dürfte daher noch viel größer sein.

Zahlentafel 1.

$a = \frac{T\,dP}{P\,dT}$ *für Wasserdampf, berechnet nach Dampfdruckgleichungen von Smith, Keyes* und *Gerry*[19]; *Osborne, Stimson, Fiock und Ginnings*[20] *bzw. Osborne und Meyers*[21].

Temperatur	a nach *Smith, Keyes* und *Gerry*[19]	a nach *Osborne, Stimson, Fiock* und *Ginnings*[20]	a nach *Osborne* und *Meyers*[21]
100	13,3229	13,3195	13,3213
150	11,3479	11,3484	11,3473
200	9,8989	9,8997	9,9006
250	8,8343	8,8368	8,8354
300	8,0738	8,0761	8,0762
350	7,6502	7,6431	7,6440
360	7,6369	7,6341	7,6310
365	7,6469	7,6522	7,6475
370	7,6714	7,6911	7,6920
371	7,6786	7,7013	7,7073
372	7,6861	7,7130	7,7265
373	7,6948	7,7259	7,7529
374	7,7041	7,74006	7,81035

Auch in diesem Falle schien uns daher das unmittelbare Verfahren der Berechnung der a-Werte als Differenzenquotienten einwandfreier und zweckmäßiger zu sein. Das Ergebnis dieser Bearbeitung der vier erwähnten Meßreihen ist in Abb. 6 dargestellt, wobei die praktisch aufeinanderfallenden Kurven wieder um die beigeschriebenen Beträge auseinander gezogen wurden und der Ordinatenmaßstab entsprechend der höheren Meßgenauigkeit vergrößert wurde. Der Verlauf dieser Kurven in der Nähe des kritischen Punktes ist nach dem Ergebnis der bisherigen Prüfungen überraschend. Das Minimum, das nach unserem Kriterium bei der kritischen Temperatur $\vartheta = 1$ liegen sollte, wird hier bereits früher (etwa für $\vartheta = 0{,}98$ entsprechend 360° C) erreicht, und a erreicht am kritischen Punkt wieder einen merklich höheren Wert. Damit wird die in Abb. 1 dargestellte, aus der Dampftafel[5] berechnete a-Kurve für Wasser tatsächlich bestätigt. Bei der ausgezeichneten Übereinstimmung der vier Kurven scheint ein Zweifel an dieser Tatsache nicht berechtigt. Lediglich der letzte, mit Hilfe der kritischen Daten berechnete (und daher wieder als Quadrat eingetragene) Punkt der Kurve nach *Smith, Keyes* und *Gerry*[19] fällt aus dem sonst vorhandenen verhältnismäßig steilen Anstieg jenseits des Minimums etwas heraus. Gerade dieser Punkt ist aber in Frage zu stellen, da der zur Berechnung verwendete kritische Druck von den Autoren nicht unmittelbar gemessen, sondern durch Extrapolation ihrer Dampfdruckmessungen gefunden wurde. Es ist nur natürlich, daß man für die Fortsetzung einer Kurve nicht eine so

[17] *L. Holborn* und *A. Baumann*, Ann. Physik 31 (1910) S. 945.
[18] *A. Egerton* und *G. S. Callendar*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 231 (1932) S. 147.
[19] *L. B. Smith, F. G. Keyes* und *H. T. Gerry*, Proc. Amer. Acad. 69 (1934) S. 137.
[20] *N. S. Osborne, H. F. Stimson, E. F. Fiock* und *D. C. Ginnings*, Bur. Stand. J. Res. 10 (1933) S. 155.
[21] *N. S. Osborne* und *C. H. Meyers*, Bur. Stand. J. Res. 13 (1934) S. 1.

starke Änderung der Ableitung annehmen wird, wie diese hier tatsächlich auftritt. Alle anderen in Abb. 6 eingetragenen Punkte beruhen unmittelbar auf Meßergebnissen, und die gute Übereinstimmung der Kurven gerade in diesem Gebiet gestattet wohl keinen Zweifel an der Tatsache, daß hier das neue Kriterium nicht streng gilt.

Nun erhebt sich natürlich sofort die wichtige Frage, ob dieser Verlauf nur für das in vieler Beziehung nicht normale Wasser gilt, oder ob es sich hier um eine allgemein auftretende Erscheinung handelt, die nur bei der Prüfung der anderen Stoffe durch die stärkere Streuung der berechneten a-Werte nicht so klar zum Ausdruck kommt. Sieht man sich daraufhin die Abb. 2 bis 5 noch einmal etwas näher an, so erkennt man, daß die Kurven für eine Anzahl von Stoffen in der Tat kurz vor dem kritischen Punkt wieder anzusteigen scheinen. Als Beispiele seien genannt in

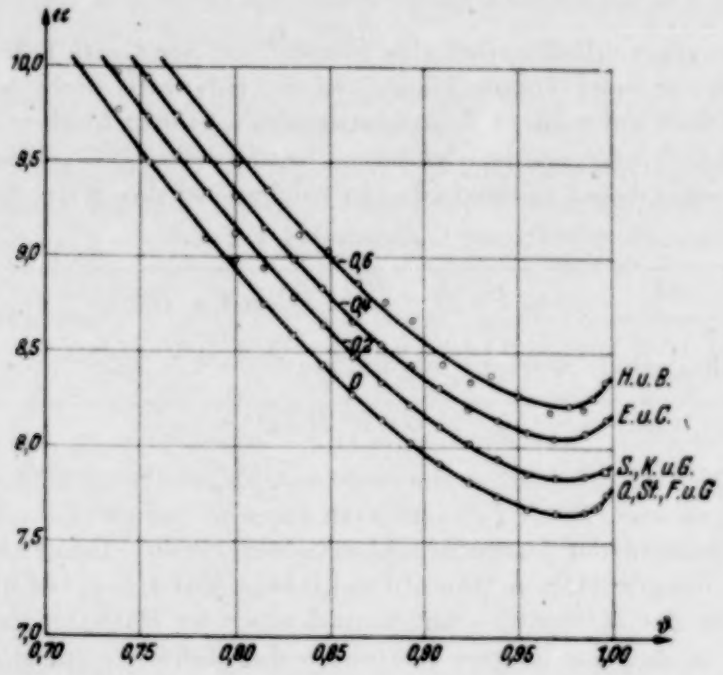


Abb. 6. a-Kurven für Wasser nach Messungen von *Holborn* und *Baumann*[17]; *Egerton* und *Callendar*[18]; *Smith, Keyes* und *Gerry*[19] bzw. *Osborne, Stimson, Fiock* und *Ginnings*[20].

Abb. 2: Hexan, Heptan und Diisobutyl, in Abb. 3 die Kurven der höheren Ester, in Abb. 4 Methylalkohol. Mag dieser Anstieg in einzelnen Fällen auch durch Ungenauigkeiten der Meßwerte vorgetäuscht sein, so muß man andererseits doch sagen, daß ein entsprechender Abfall, wie er bei zufälligen Streuungen ebenso oft auftreten müßte, nicht vorkommt, so daß es sich auch in diesen Fällen um eine reale Erscheinung handeln könnte. Scheinbar tritt dieser Anstieg der a-Kurve nur bei langkettigen Verbindungen auf, so daß man vielleicht doch von einer Anomalie sprechen kann. Es ist aber auch möglich, daß ein ähnliches Verhalten immer vorhanden ist und nur bei den genannten Stoffgruppen stärker hervortritt. Eine klare Entscheidung dieser Frage wird erst möglich sein, wenn auch für andere Stoffe Messungen von ähnlich großer Genauigkeit vorliegen, wie für Wasser, wobei eine besonders gründliche Untersuchung des Gebietes nahe am kritischen Punkt wünschenswert wäre. Nach dem augenblicklichen Stand der Dinge möchten wir daher das Kriterium in der in Abschnitt 3 formulierten Form aufrecht erhalten, mit dem Zusatz, daß es bei sehr großen Ansprüchen an die Genauigkeit (die hinsichtlich der Meßdaten bisher nur für Wasser erfüllt sind) möglicherweise nicht streng gilt. Diese notwendige Einschränkung ist zwar aus theoretischen und didaktischen Gründen zu bedauern, da sie das zunächst als streng gültig angenommene Naturgesetz zur Regel degradiert, die bloß innerhalb gewisser Grenzen erfüllt ist; sie setzt aber die praktische Bedeutung des Kriteriums kaum herab. Die a-Kurven der nicht assoziierten Stoffe haben, im ganzen betrachtet, einen parabelähnlichen Verlauf mit einem Minimum bei der kritischen Temperatur. Der möglicherweise vorhandene geringe, aber scharfe Anstieg kurz unterhalb des kritischen Punktes erscheint jedenfalls nicht als normale Fortsetzung dieses allgemeinen Kurvenverlaufes, sondern eher als eine künstliche Aufpfropfung, wie man bei der Betrachtung der Kurven für Wasser in Abb. 6 deutlich erkennt.

7. Bedeutung und Anwendung des Kriteriums. Wenn das Kriterium aus den im vorigen Abschnitt erörterten Gründen vielleicht auch nicht als neues Gesetz über das Verhalten der Materie am kritischen Punkt gewertet werden kann, so dürfte es doch für praktische thermodynamische Überlegungen und Rechnungen wertvoll sein. In erster Linie ist dabei an die Aufstellung von Dampfdruckgleichungen zu denken, für die man am kritischen Punkt (oder jedenfalls in dessen unmittelbarer Nähe) ein Minimum von a fordern muß, wenn sie den gesamten Verlauf einer Dampfdruckkurve wiedergeben sollen. Formeln, die dieser Bedingung nicht genügen, sind also von vornherein als unbrauchbar auszuschließen. Damit gewinnen wir einen wertvollen Prüfstein, der eine Auslese unter den zahllosen vorgeschlagenen Gleichungen ermöglicht.

Für die übliche Dampfdruckformel (1), deren Differentiation zunächst zu Gleichung (5) führt, liefert das Kriterium die Bedingung

$$B = T_k^2 (D + 4 E T_k + 9 F T_k^2 + \ldots) \tag{8}$$

Daraus können wir bereits schließen, daß eine Formel von der Gestalt $\log P = A - B/T + C \log T$, wie sie von verschiedener Seite vorgeschlagen wurde, jedenfalls nicht bis zum kritischen Punkt richtig sein kann, sondern auf niedere Temperaturen beschränkt bleiben muß. Dasselbe gilt auch für die von *F. Henglein*[22] angegebene Gleichung: $\log P = A - B/T^n$, selbst wenn man diese noch durch ein logarithmisches Glied ergänzt, da ein solches auf das Kriterium ohne Einfluß ist.

Wenn man mit einer viergliedrigen Gleichung der Form

$$\log P = A - \frac{B}{T} + C \log T + D T^n \tag{9}$$

auszukommen wünscht, erhält man die Bedingung

$$B = n^2 D T_k^{n+1} \tag{8a}$$

so daß nur drei Koeffizienten den Meßwerten anzupassen sind. Setzt man $n = 1$, wie dies im Schrifttum häufig geschieht, so wird $B = D T_k^2$, und man kann weiter die Zahlenwerte der Koeffizienten mit Hilfe von drei Punkten der Dampfdruckkurve berechnen. Ein Vergleich der so unter Verwendung des Kriteriums ermittelten Dampfdruckformel mit einer, bei der die vier Koeffizienten ohne Berücksichtigung des Kriteriums auf Grund von vier Punkten der Dampfdruckkurve berechnet sind, zeigt nun, daß das letztere Verfahren die Meßwerte im allgemeinen wesentlich genauer wiederzugeben vermag. Das ist keineswegs überraschend; denn durch die vier freien Koeffizienten kann man die Formel an vier Punkten zur völligen Übereinstimmung mit der Meßkurve bringen, und wenn man diese Punkte einigermaßen gleichmäßig innerhalb des Temperaturintervalls verteilt, wird man auch dazwischen keine allzu starken Abweichungen erhalten. Verwendet man dagegen das Kriterium, dann läßt sich durch die Wahl der Koeffizienten nur an drei Punkten Deckung erzwingen, während das Kriterium den richtigen Verlauf in der Nähe der kritischen Temperatur garantiert; d. h. man wählt jetzt den vierten Punkt sozusagen unmittelbar neben dem kritischen. Das muß natürlich ein schlechteres Ergebnis zeitigen als eine gleichmäßige Verteilung der vier Punkte, solange man die Aufstellung der Dampfdruckformel als rein mathematisches Interpolationsproblem auffaßt. Einen Vorteil kann die Anwendung des Kriteriums erst dann bringen, wenn man eine Gleichung besitzt, die sich von vornherein dem Verlauf der Dampfdruckkurve eng anzuschmiegen vermag, was nach dem in Abschnitt 1 Gesagten für diese einfachen Formeln aber nicht zutrifft.

Man kann nun versuchen, den Exponenten n in Gleichung (9) nicht, wie üblich, gleich 1 oder 2 zu setzen, sondern so lange zu variieren, bis man unter Verwendung des Kriteriums eine gute Anpassung an die Messungen erhält. Dies wurde für die von *Crommelin*, *Bijlereld* und *Brown*[14] bestimmte Dampfdruckkurve des Kohlenoxyds durchgeführt*, für das von diesen Autoren folgende Interpolationsformel angegeben wird:

$$\log P = 24{,}45338 - \frac{544{,}66}{T} - 10{,}217 \log T + 0{,}02178\ T\,, \tag{10}$$

welche die Bedingung (8a) nicht erfüllt. Hierbei (und bei einer ähnlichen Prüfung der Messungen von *L. Riedel*[3] an CF_3Cl) stellte sich heraus, daß man den Exponenten n in Gl. (9) gleich 5 oder 6

[22] *F. Henglein*, Z. phys. Chem. 98 (1921) S. 98.

* Herr Professor Dr. *P. Günther* hat uns auf diese Meßreihe besonders aufmerksam gemacht. Für die Durchführung dieser Rechnungen sind wir Herrn Dr. *O. Deublein* zu Dank verpflichtet.

setzen muß, um eine brauchbare Anpassung an die Meßergebnisse bei Erfüllung der Bedingung (8a) zu erzielen, während eine völlig einwandfreie Darstellung der gemessenen Dampfdruckkurven durch Gleichung (9) überhaupt nicht möglich ist. Immerhin ist das mit $n=6$ unter Verwendung des Kriteriums erzielbare Ergebnis schon recht erfreulich, wie das Beispiel des Kohlenoxyds zeigt, für das sich auf diese Weise folgende Gleichung ergab:

$$\log P = 8{,}86774 - \frac{401{,}314}{T} - 2{,}06895 \log T + 0{,}01524 \left(\frac{T}{100}\right)^6. \qquad (11)$$

Die Differenzen zwischen den gemessenen und den für die gleichen Temperaturen nach dieser Gleichung berechneten Logarithmen der Dampfdrucke wurden in Zahlentafel 2 zum Vergleich neben die von *Crommelin*, *Bijleveld* und *Brown*[14] mittels Gleichung (10) erhaltenen Werte gestellt. Man erkennt, daß die Messungen durch Gleichung (11), die (da $n=6$ als universelle Konstante angesehen werden soll) nur drei freie Koeffizienten enthält, etwa mit derselben Genauigkeit wiedergegeben werden, wie durch Gleichung (10).

Zahlentafel 2.

Vergleich der nach Gl. (10) bzw. (11) berechneten Dampfdrucke von Kohlenoxyd mit den Meßwerten von Crommelin, Bijleveld und Brown[14].

Temperatur $T°$ K	Dampfdrucke gemessen P Atm	Abweichungen nach Gl. (10) $\Delta \log P$	Abweichungen nach Gl. (11) $\Delta \log P$
132,47	33,902	−0,00000	+0,00003
131,82	32,911	− 21	+ 13
129,23	29,184	− 96	+ 48
129,23	29,160	− 131	+ 21
125,96	25,014	− 58	− 91
123,46	22,152	+ 2	− 153
112,20	12,072	+ 165	− 174
107,62	9,082	+ 23	+ 37
103,48	6,922	+ 160	− 60
94,34	3,473	− 263	− 168
87,61	1,8833	+ 17	− 1
81,45	0,98131	− 39	− 28
77,96	0,64566	+ 1	− 71
73,85	0,37197	− 10	− 1
73,85	0,37198	− 9	− 1
*73,86	0,37237	− 44	+ 46
68,17	0,15387	+ 93	+ 154
68,14	0,15292	+ 144	+ 203

Wir möchten daher auch in anderen Fällen die Verwendung der Dampfdruckgleichung (9) mit $n=6$ zur Darstellung der Messungen bis zum kritischen Punkt empfehlen. In reduzierten Koordinaten, unter Verwendung des a-Kriteriums und Bestimmung der Konstanten A aus den kritischen Daten erhält man dafür folgende Formel, in der somit nur noch zwei Koeffizienten den Meßwerten anzupassen sind:

$$\log \pi = C \log \vartheta + D T_k^n \left(\vartheta^6 - \frac{36}{\vartheta} + 35\right). \qquad (12)$$

Besondere Bedeutung besitzt das Kriterium für die Bestimmung des häufig nicht unmittelbar gemessenen kritischen Druckes durch Extrapolation der Dampfdruckkurve bis zur kritischen Temperatur. Die empirischen Interpolationsformeln von der üblichen Gestalt können dabei leicht zu merklichen Fehlern führen. So gibt beispielsweise *L. Riedel*[3] auf Grund einer Extrapolation seiner (in Abschnitt 4 wiedergegebenen) Dampfdruckformel für CF_3Cl bis zur gemessenen kritischen Temperatur (28,78° C) den kritischen Druck zu 39,36 ata an. Aus der a-Kurve für diesen Stoff (Abb. 5) erhält man verhältnismäßig genau für den kritischen Punkt den Wert $a_k=6{,}65$. Dieser liefert mit Hilfe des letzten Meßpunktes (24,85° mit 36,16 ata) für den kritischen Druck den etwas höheren Wert von 39,45 ata, dem eine wesentlich größere Sicherheit zukommen dürfte

als dem durch Extrapolation der rein empirischen Formel gewonnenen. Durch einen eventuellen geringen Anstieg der a-Kurve im kritischen Gebiet würde dieser Wert sogar noch etwas höher ausfallen.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß der Versuch, das a-Kriterium auf Grund thermodynamischer Überlegungen oder kin tisch-statistischer Vorstellungen abzuleiten oder wenigstens plausibel zu machen, zwar ziemlich schwierig, aber nicht ganz aussichtslos erscheint, in Anbetracht der Tatsache, daß a, wie in Abschnitt 2 dargelegt wurde, eine verhältnismäßig einfache physikalische Bedeutung besitzt. Da sich der Dampfdruck bekanntlich aus einer für den gesamten fluiden Zustand eines Stoffes gültigen Zustandsgleichung berechnen läßt, stellt unser Kriterium auch für die Aufstellung einer Zustandsgleichung eine am kritischen Punkt gültige Bedingung dar, deren explizite Formulierung allerdings ziemlich kompliziert ausfallen dürfte. Wir hoffen, daß die Zukunft eine Klärung der offenen Fragen bringen wird, wofür neue Präzisionsmessungen und gründliche theoretische Diskussionen erforderlich sind.

Mitteilung aus dem Kältetechnischen Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe.

(Eingegangen am 10. Juli 1947.

Praxis des spannungsoptischen Versuchs mit Dekorit als Modellwerkstoff.

Von **Ernst Mönch** in München.

1. Einleitung. Für die polarisationsoptischen Modellversuche zur Ermittlung von Spannungszuständen — kurz Spannungsoptik[1] genannt — verwendet man heute meist die Kunstharze der Phenol-Formaldehyd-Gruppe, wie Dekorit, Trolon, Phenolite, Bakelit usw. Es werden zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren angewandt:

1) Beim ebenen spannungsoptischen Versuch wird ein Kunstharzmodell des zu untersuchenden Objekts bei Zimmertemperatur belastet und unter Last mit polarisiertem Licht durchstrahlt und photographiert.

2) Das Erstarrungsverfahren der räumlichen Spannungsoptik beruht darauf, daß die Phenolkunstharze die Fähigkeit besitzen, Spannungszustände festzuhalten, wenn man das aus ihnen verfertigte Modell bei etwa 80° C belastet und unter Last abkühlen läßt. Nach dem Erkalten kann das Modell zerschnitten und die Schnitte im polarisierten Licht untersucht werden.

Der ebene spannungsoptische Versuch ist genauer als der räumliche, da man mit kleineren Formänderungen auskommt. Außerdem hat man den Vorteil, daß man das Modell öfters verwenden, verschiedene Belastungsfälle studieren und Änderungen am Modell vornehmen kann, während man ein räumliches Modell nur einmal verwenden kann. Daher wird man in allen Fällen, wo eine Zurückführung auf einen ebenen Spannungszustand möglich ist, mit diesem auszukommen suchen.

Die in der vorliegenden Arbeit mitgeteilten Erkenntnisse sind das Ergebnis zahlreicher spannungsoptischer Untersuchungen, die sämtlich mit dem Kunstharz „Dekorit", einem Fabrikat der Dr. F. Raschig GmbH. in Ludwigshafen durchgeführt wurden.

2. Die Eigenschaften der Phenol-Formaldehyd-Kunstharze. a) Mechanisches und optisches Verhalten. Die Phenolkunstharze sind ein polymeres Kondensationsprodukt, das man sich nach *Kuske*[2] und *Hetényi*[3] als aus zwei Teilen aufgebaut vorstellt, einem temperaturunabhängigen hochmolekularen elastischen Netz und einem weniger polymeren plastischen Teil zwischen den Maschen des elastischen Netzes, der bei Zimmertemperatur sehr zäh, bei erhöhter Temperatur flüssig ist. Beim handelsüblichen Material läßt sich durch Wärmebehandlung („Härtung") das elastische Netz auf Kosten des plastischen Anteils noch verstärken. Die günstigsten Härtungen hat der Verfasser für die ebene Spannungsoptik[4] und für das Erstarrungsverfahren[5] mit Dekorit durch Versuche ermittelt.

Bei Zimmertemperatur ist der zähe plastische Teil für die Kriecherscheinungen verantwortlich. Daher härtet man Modelle für die ebene Spannungsoptik zweckmäßigerweise möglichst stark. Bei 80° C und darüber dagegen trägt das elastische Netz allein die Belastung. Läßt man ein bei erhöhter Temperatur belastetes Modell erkalten, so hält der erstarrende plastische Teil die Verformungen des elastischen Netzes fest und ermöglicht so das Erstarrungsverfahren. Da das elastische Netz Träger des optischen Effekts beim Erstarrungsverfahren ist, ist die günstigste Härtung die, wenn das Netz so stark ist, daß der Erstarrungsvorgang gerade noch möglich ist.

Bei den für das Erstarrungsverfahren günstigsten Versuchsbedingungen zeigt Dekorit auch im erwärmten Zustand plastische und Kriecherscheinungen, doch ist trotzdem die einwandfreie Wiedergabe von Spannungszuständen möglich[5].

b) Der Randeffekt und seine Bekämpfung durch die Schutzhülle aus Aluminiumfolie. Bei der Herstellung der Phenolkunstharze durch Kondensation tritt eine Abspaltung von Wasser ein. Dieses im Kunstharz enthaltene Wasser ist die Ursache für die sehr störende Erscheinung des Randeffekts. An den freien Oberflächen findet eine ständige Aus-

[1] Über die Grundlagen der Spannungsoptik siehe *L. Föppl* und *H. Neuber*, Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. München 1935. — *L. Föppl*, Grundl. d. Spannungsoptik in Ergebnisse d. techn. Röntgenkunde, Bd. VI; herausgeg. v. E. Schiebold. Leipzig 1938. — *G. Mesmer*, Spannungsoptik. Berlin 1939. — *L. Föppl*, Spannungsoptische Messungen, in Handb. d. Werkstoffprüfung, Bd. I; herausgeg. v. E. Siebel. Berlin 1940.

[2] *A. Kuske*, Forsch. Ing.Wes. 9 (1938), S. 139. Diss. München.

[3] *Hetényi*, Journ. Appl. Mech. 5 (1938), S. A-149.

[4] *E. Mönch*, Forsch. Ing.Wes. 13 (1942), S. 12.

[5] *E. Mönch*, Habilitationsschrift. München 1943; erscheint demnächst in der Zeitschrift Kunststoffe.

dünstung von Wasser statt, die zur Folge hat, daß sich die Oberfläche zusammenzieht und Eigenspannungen entstehen, wenn nicht Maßnahmen ergriffen werden, die die Ausdünstung verhindern. Bei Zimmertemperatur sind die durch die Randwirkung verursachten Eigenspannungen nach einigen Stunden so groß, daß sie die Meßgenauigkeit schon beeinträchtigen. Bei höherer Temperatur verspannen sich die Modelle noch rascher. Soll die Randwirkung verhindert werden, so müssen die Kunstharzmodelle mit einem vollkommen wasserundurchlässigen Überzug versehen werden. Da die Modelle, auch für die ebene Spannungsoptik, praktisch immer, sei es zur Härtung oder zur Beseitigung von Eigenspannungen, einer Wärmebehandlung unterworfen werden müssen, muß der Überzug auch bei erhöhten Temperaturen den Durchtritt des ausdünstenden Wassers verhüten. Er muß ferner so nachgiebig sein, daß er bei Wärmedehnungen nicht selbst Spannungen verursacht. Ideal wäre ein durchsichtiger Lacküberzug, der diese Eigenschaften besitzt. Ein solcher Lack ist bisher jedoch noch nicht gefunden.

Der Verfasser hat indessen ein Mittel zur Verhütung der Randwirkung angegeben, das den praktischen Anforderungen weitgehend entspricht[1]. Es besteht darin, daß man die Modelle mit Öl bestreicht und hierauf mit einem lückenlosen Überzug aus möglichst dünner Aluminiumfolie belegt, der durch Adhäsion am Modell haftet. Die einzelnen Blätter des Überzuges müssen sich gegenseitig überlappen. Dadurch wird erreicht, daß der Überzug die Ausdünstung nirgends durchtreten läßt, trotzdem aber nicht selbst bei Wärmedehnungen des Modells Verspannungen verursacht, da sich die überlappten Schüsse gegeneinander verschieben können. Das Einwickeln in die Schutzhülle bringt zugleich noch einen weiteren Vorteil mit sich, der bei der Wärmebehandlung von fertigen Modellen für die ebene Spannungsoptik von Wichtigkeit ist. Es ließe sich praktisch nie erreichen, ein Modell so vollkommen eben herzustellen, daß es, auf eine ebene Unterlage gelegt, dort ganz gleichmäßig aufläge. Erwärmt man das Modell, so entstehen an den Auflagestellen unregelmäßige Eigenspannungszustände. Liegt dagegen das Modell in der Schutzhülle auf einer ebenen Glasplatte, so bildet sich zwischen Modell und Hülle ein Ölpolster aus, auf dem das Modell gewissermaßen schwimmt. Dadurch ist ein vollkommen gleichmäßiges Aufliegen des Modells auf der Unterlage gewährleistet und es können auf diese Weise beliebig große, ebene Modelle ohne Schwierigkeit eigenspannungsfrei gehärtet werden.

In der Schutzhülle können die Modelle 1 bis 2 Wochen spannungsfrei aufbewahrt werden.

3. Die verschiedenen Arten des spannungsoptischen Versuchs mit Dekorit und die zur Durchführung notwendigen Materialkonstanten. a) Härtungsfaktor. Die Härtung von Dekorit kann bei Temperaturen zwischen 80 und 130° C durchgeführt werden. Zur Bezeichnung einer bestimmten Härtung ist die Angabe der Härtungsdauer und der Temperatur erforderlich. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, als Normaltemperatur, auf die sich alle Vorschriften über Härtungsdauer usw. beziehen, 115° C zu wählen. Die Härtungswirkung irgendeiner anderen Temperatur kann mit Hilfe eines Härtungsfaktors a (Zahlentafel 1), der jeder Temperatur zugeordnet ist, berechnet werden. Das Produkt aus der Zeit, während der bei einer Temperatur gehärtet wurde, und dem Härtungsfaktor a für diese Temperatur ergibt die Zeit, die bei 115° C hätte aufgewendet werden müssen, um die dieselbe Härtung zu erzielen.

Zahlentafel 1. *Härtungsfaktor a für Dekorit.*

°C	a	°C	a	°C	a	°C	a	°C	a
80	0,053	90	0,124	100	0,286	110	0,66	120	1,50
81	0,057	91	0,134	101	0,310	111	0,71	121	1,64
82	0,062	92	0,145	102	0,337	112	0,77	122	1,78
83	0,068	93	0,158	103	0,367	113	0,84	123	1,93
84	0,074	94	0,173	104	0,399	114	0,92	124	2,09
85	0,080	95	0,188	105	0,434	115	1,00	125	2,26
86	0,088	96	0,205	106	0,470	116	1,08	126	2,45
87	0,096	97	0,222	107	0,510	117	1,17	127	2,65
88	0,105	98	0,242	108	0,555	118	1,27	128	2,88
89	0,114	99	0,263	109	0,600	119	1,38	129	3,13
								130	3,40

Beispielsweise muß man also bei 96° C rund 5mal so lange härten wie bei 115° C.

Mit Hilfe des Härtungsfaktors kann auch die Härtungswirkung der Anheiz- und Abkühlzeit eines Härtungsvorgangs berücksichtigt werden, wenn der Temperaturgang hierfür bekannt ist.

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 267.

b) Ebene Spannungsoptik. In Zahlentafel 2 sind Durchschnittswerte der wichtigsten Werkstoffgrößen für verschieden gehärtetes Dekorit bei Zimmertemperatur zusammengestellt.

Zahlentafel 2.

Eigenschaften von verschieden gehärtetem Dekorit bei Zimmertemperatur.

Härtungsdauer in Std. bei 115° C	0	3	6	12
Elastizitätsmodul E_0 in kg/cm²	20 000	27 000	36 000	37 000
Spannungsoptische Konstante S_0 in $\frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}}$ · cm bei Na-Licht etwa	8	10	14	14
Kriechen (gemessen nach 5 Minuten in % der ursprünglichen Dehnung)	80%	35%	16%	13%
Zugfestigkeit in kg/cm² etwa	150	450	650	950
Farbe	leicht bläulich	leicht gelblich	gelb	orange

Hiezu ist im einzelnen noch zu bemerken:

Als spannungsoptische Konstante S soll in dieser Arbeit immer die Hauptspannungsdifferenz pro Isochromatenordnung[1] bei 1 cm Modelldicke, wenn mit Natriumlicht gearbeitet wird, verstanden werden. Man erhält demnach die Hauptspannungsdifferenz an einer Stelle des Modells, indem man die dort auftretende Isochromatenordnung mit S multipliziert und durch die Modelldicke dividiert.

Die spannungsoptische Konstante für die Hauptschubspannung beträgt $S/2$.

Die Größen E_0 und S_0 gelten für den Zustand sofort nach der Belastung, wenn noch kein Kriechen erfolgt ist. Wird beim ebenen Versuch erst einige Zeit, z. B. 5 min nach der Belastung photographiert, so werden die hierfür maßgebenden Werte $E_{5\,\text{min}}$ und $S_{5\,\text{min}}$ usw. etwas kleiner, und zwar tritt dies um so mehr in Erscheinung, je stärker das Kriechen ist. Im Interesse der Genauigkeit verwendet man, wie erwähnt, möglichst stark gehärtetes Dekorit, da dann nicht nur das Kriechen geringer ist, sondern auch bessere Linearität zwischen Spannung und Dehnung besteht[2].

Die in der Tafel angegebenen Zugfestigkeiten gelten für kurzdauernde Belastung. Bei längerer Belastung kann der Bruch schon früher eintreten. Um gegen längere Belastung und auch gegen Kerbwirkung eventueller Bearbeitungsriefen etc. genügend Sicherheit zu haben, sollte die Beanspruchung der Modelle auf Zug keinesfalls größer sein als etwa die Hälfte der hier angegebenen Zugfestigkeit.

c) Die beiden Möglichkeiten der Durchführung des Erstarrungsverfahrens. Dekorit ist in keinem Zustand elastisch in jenem strengen Sinne, daß zu jeder Belastung eindeutig eine bestimmte Formänderung gehört, da es immer plastische und Kriecherscheinungen zeigt. Bei den günstigsten Versuchsbedingungen für das Erstarrungsverfahren sind die Abweichungen vom elastischen Verhalten sogar recht beträchtlich. Um nun dennoch einen einwandfrei definierten Spannungszustand zu erhalten, von dem man mit Hilfe der Modellgesetze auf die Wirklichkeit schließen kann, kann man entweder die Belastungen oder die Verformungen während des Versuches konstant halten. Gleichzeitig mit dem Hauptversuch läßt man einen Eichversuch laufen, bei dem ein Versuchskörper aus dem gleichen Material wie das Modell einem bekannten Spannungszustand, gewöhlich reiner Biegung, unterworfen wird. Der Eichkörper erfährt genau die gleiche Behandlung wie das Modell; auch bei ihm werden entweder Lasten oder Verformungen konstant gehalten. Der Eichversuch liefert die spannungsoptische Konstante.

Beide Arten des Erstarrungsverfahrens haben ihre Vor- und Nachteile.

In der Praxis hat sich erwiesen, daß man meistens das Verfahren konstanter Last anwenden wird. Sein Hauptvorteil liegt in der einfachen Messung der Kräfte sowohl beim Haupt- als auch beim Eichversuch. Beim Verfahren konstanter Last nimmt nach Aufbringen der Be-

[1] Isochromaten sind bekanntlich die im polarisierten Licht im Modell auftretenden Linien gleicher Hauptspannungsdifferenz. Näheres im Schrifttum (Fußnote 1 von Seite 267).

[2] Siehe Fußnote 4 von S. 267.

lastungen die Verformung zuerst schnell, dann immer langsamer, im ganzen bei normaler Härtung um ein Vielfaches des Anfangswertes zu. Wird mit Federbelastung gearbeitet, so müssen die Lasten daher bis zur Beendigung der Abkühlung, besonders aber am Anfang der Belastung, ständig nachgestellt werden. Dies ist der Hauptnachteil des Verfahrens. Bei Gewichtsbelastungen fällt dieser Nachteil weg, doch ist es bei größeren Lasten oft schwer möglich, diese durch Gewichte aufzubringen.

Unbrauchbar ist das Verfahren konstanter Last bei allen Problemen mit gegebenen Formänderungsgrößen. (Siehe hierüber Abschnitt 4c.) Bei solchen Problemen muß das Verfahren konstanter Formänderung angewandt werden.

Der Hauptnachteil des Verfahrens konstanter Formänderung liegt in der Schwierigkeit der Messung der aufzubringenden äußeren Lasten, da diese ja nicht konstant bleiben, sondern dauernd abnehmen, und zwar am Anfang der Belastung sehr rasch. Ein weiterer Mangel liegt darin, daß es überhaupt praktisch sehr schwierig ist, die Formänderung konstant zu halten, vor allem bei der Abkühlung. Phenolkunstharz besitzt eine verhältnismäßig hohe Wärmedehnung. Dadurch, daß sich Modelle und Einspannvorrichtungen bei der Abkühlung verschieden stark zusammenziehen, werden die Kraftangriffe entlastet, wenn es sich um Druckkräfte handelt, und zwar wenn es sich um mehrere Kräfte handelt, nicht etwa um gleiche Beträge, sondern ganz unterschiedlich je nach Art des Modelles. Zugkräfte steigen sogar weiter an. Der Eichversuch ist denselben Einflüssen unterworfen. Einigermaßen unbedenklich ist diese Fehlerquelle nur dann, wenn die Wege der äußeren Lasten groß gegen die Wärmedehnungen sind, z. B. bei Biegungsbeanspruchungen. Eine weitere Ursache von Fehlern kann ferner dann gegeben sein, wenn die Einspannvorrichtung nicht stark genug ausgeführt wird, so daß sie nicht vollkommen starr ist.

Aus allen diesen Gründen hat man sich darüber klar zu sein, daß das Verfahren der konstanten Formänderung auch bei noch so großer Sorgfalt des Experimentators immer ungenauer sein wird als das Verfahren konstanter Last, sobald die Messung der äußeren Lasten notwendig ist. Dies ist aber gerade bei den Problemen mit gegebenen Formänderungsgrößen, für die von den räumlichen Verfahren nur das konstanter Formänderung in Frage kommt, immer der Fall, da ja die Lasten und die gegebenen Formänderungsgrößen unmittelbar voneinander abhängen, wie in Abschnitt 4 näher ausgeführt wird.

Bei gewissen besonders gelagerten Problemen kann jedoch das Verfahren konstanter Formänderung sogar demjenigen konstanter Last vorzuziehen sein. Die drei Bedingungen hierfür sind, daß nur eine einzige Last angreift, daß auf die Messung dieser Last verzichtet werden kann, und daß keine Formänderungsgrößen gegeben sind. Auf die Messung der äußeren Last kann dann verzichtet werden, wenn das Modell einen Teil besitzt, der theoretisch streng erfaßt werden kann. Dieser Teil ersetzt dann den Eichversuch. Der Spannungszustand kann einfach durch Vergleich mit jenem theoretisch zugänglichen Teil quantitativ vollkommen ermittelt werden.

d) Erstarrungsverfahren bei konstanter Last. Da das Erstarrungsverfahren bei konstanter Last dasjenige ist, das für die meisten Probleme in Frage kommt, sollen zunächst für dieses Verfahren alle Fragen der Materialkonstanten ausführlich besprochen werden.

Als zweckmäßige Versuchsdurchführung, die in folgendem immer vorausgesetzt wird, wurde früher[1] festgelegt: Konstanthalten der Versuchstemperatur während zweier Stunden nach der Belastung; hierauf Abkühlung um 10° je Stunde.

Zahlentafel 3 enthält die unter diesen Bedingungen sich ergebende spannungsoptische Konstante S in Abhängigkeit von Härtungsdauer und Versuchstemperatur, Tafel 4 den Elastizitätsmodul. (Über die Versuche, durch die diese Zahlenwerte ermittelt wurden, wird später im Anhang berichtet.) Diejenigen Werte von S und E, die auf Grund der früheren Untersuchungen für die einwandfreie Wiedergabe von Spannungszuständen brauchbar sind, sind durch eine stark ausgezogene Linie abgegrenzt. Die günstigste Härtung ist 7 Stunden bei 115° C, die günstigste Versuchstemperatur 80° C.

Zum Ausdruck dafür, daß S und E nur Konstanten im erweiterten Sinne sind, sind sie mit dem Index L versehen, was „konstante Last" bedeuten soll.

Die spannungsoptische Konstante S_L bedeutet demnach in Erweiterung der für die ebene Spannungsoptik in Abschnitt 3, b gegebenen Definition diejenige Hauptspannungsdifferenz, die in einem aus dem erkalteten Modell herausgenommenen Schnitt von 1 cm Dicke bei Na-

[1] Siehe Fußnote 5 von S. 267.

Zahlentafel 3.

Spannungsoptische Konstante $S_L \left(\frac{kg/cm^2}{Ordnung} \cdot cm \right)$ *von Dekorit für das Erstarrungsverfahren bei konstanter Last, in Abhängigkeit von Härtung und Versuchstemperatur. Natriumlicht.*

	Härtungsdauer in Std. bei 115° C												
	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
60°	4,9	6,7	8,7	11,2	14,3								
65°	2,2	3,3	4,5	5,7	7,0	8,3	9,7	11,2					
70°	1,25	1,9	2,7	3,5	4,3	5,1	6,0	6,9	7,8				
75°	0,75	1,15	1,6	2,0	2,6	3,0	3,6	4,1	4,7	5,3	5,9		
80°	0,50	0,60	0,75	1,0	1,3	1,6	2,0	2,4	2,9	3,3	3,8	4,4	
85°	0,40	0,40	0,45	0,50	0,7	0,9	1,2	1,5	1,9	2,2	2,6	3,0	3,4
90°	0,40	0,40	0 40	0,40	0,50	0,65	0,80	1,0	1,2	1,4	1,7	1,9	2,2
95°	0,40	0,40	0,40	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0	1,15	1,3

Zahlentafel 4.

Elastizitätsmodul E_L *(kg/cm²) von Dekorit für das Erstarrungsverfahren bei konstanter Last, in Abhängigkeit von Härtung und Versuchstemperatur.*

	Härtungsdauer in Std. bei 115° C												
	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
60°	1940	2600	3500	4700	6600								
65°	1030	1550	2150	2900	3850	5100	6700	8700					
70°	620	960	1400	1880	2450	3200	4100	5300	6700				
75°	380	600	870	1120	1550	1900	2500	3100	4000	4800	5900		
80°	245	315	415	580	800	1000	1350	1750	2300	2900	3700	4600	
85°	185	200	240	280	420	570	800	1050	1450	1800	2400	3000	3800
90°	165	180	200	210	280	390	510	670	860	1100	1400	1800	2300
95°	145	160	175	190	230	280	360	450	550	670	830	1100	1450

triumdampflicht durch die Isochromate 1. Ordnung angezeigt wird, wenn der Erstarrungsversuch bei konstanter Last unter den genannten Bedingungen durchgeführt wird.

Der Elastizitätsmodul E_L ist das Verhältnis der unter obigen Umständen während des Versuchs vorhandenen Spannung zu der nach dem Erkalten vor der Entlastung im Modell vorhandenen Dehnung.

Zur größeren Anschaulichkeit ist die spannungsoptische Konstante S_L in Abb. 1 in Abhängigkeit von der Härtungsdauer mit der Versuchstemperatur als Parameter, und in Abb. 2 in Abhängigkeit von der Versuchstemperatur mit der Härtungsdauer als Parameter dargestellt.

Um Mißerfolge bei den Versuchen zu vermeiden, ist nun folgendes von außerordentlicher Wichtigkeit. Die günstige Härtungszeit von 7 Stunden bei 115° liefert, wie aus Abb. 1 hervorgeht, bei 80° C Versuchstemperatur eine spannungsoptische Konstante S_L von 2 $\frac{kg/cm^2}{Ordnung} \cdot cm$. An diese Versuchsbedingungen wird man sich im allgemeinen halten. Nun sind aber die einzelnen Lieferungen Dekorit nie ganz gleich hinsichtlich ihrer Eigenschaften und reagieren namentlich auf die Härtung etwas verschieden. Daher ist auch der Wert von 7 Stunden für die günstige Härtung nur als Anhalt zu betrachten. Der Charakter der Kurven der Abb. 1 bleibt zwar derselbe, nur verschiebt sich gewissermaßen beim Einzelindividuum Dekorit die Abszissenteilung nach der einen oder anderen Seite. Da aber gerade im Gebiet der günstigen Härtung die Kurve: spannungsoptische Konstante-Härtungsgrad sehr steil verläuft, könnte es unter Umständen vorkommen, daß man, wenn man sich mit der Härtung nur an Tafel 3 bzw. Abb. 1 halten würde,

ohne den speziellen Eigenschaften des gerade verwendeten Ausgangsmaterials Rechnung zu tragen, eine spannungsoptische Konstante erhielte, die sich um ein Vielfaches von der gewünschten unterscheidet.

Es empfiehlt sich daher, für jede Lieferung Dekorit die günstige Härtung ein für allemal zu bestimmen, was durch einen Vorversuch und Verwendung der Abb. 1 bzw. der Tafel 3 leicht möglich ist. Man führt mit einem 7 Stunden lang gehärteten Eichstab den Erstarrungsversuch bei 80° aus und erhält ein bestimmtes S_L. Aus der Tabelle folgt für dieses eine Härtungsdauer, die im allgemeinen sich von der normalen von 7 Stunden etwas unterscheiden wird. Indem man diesen Differenzbetrag von der Härtungsdauer von 7 Stunden abzieht bzw. dazu addiert, erhält man die günstige Härtungsdauer für das betreffende Material.

Ist man sich über die Eigenschaften des Materials nicht klar, will aber aus Zeitersparnis auf einen Vorversuch verzichten, so härtet man besser vorsichtshalber etwas weniger, etwa nur 6 Stunden bei 115° C. Macht man dann den Versuch bei 80° C, so arbeitet man sicher außerhalb

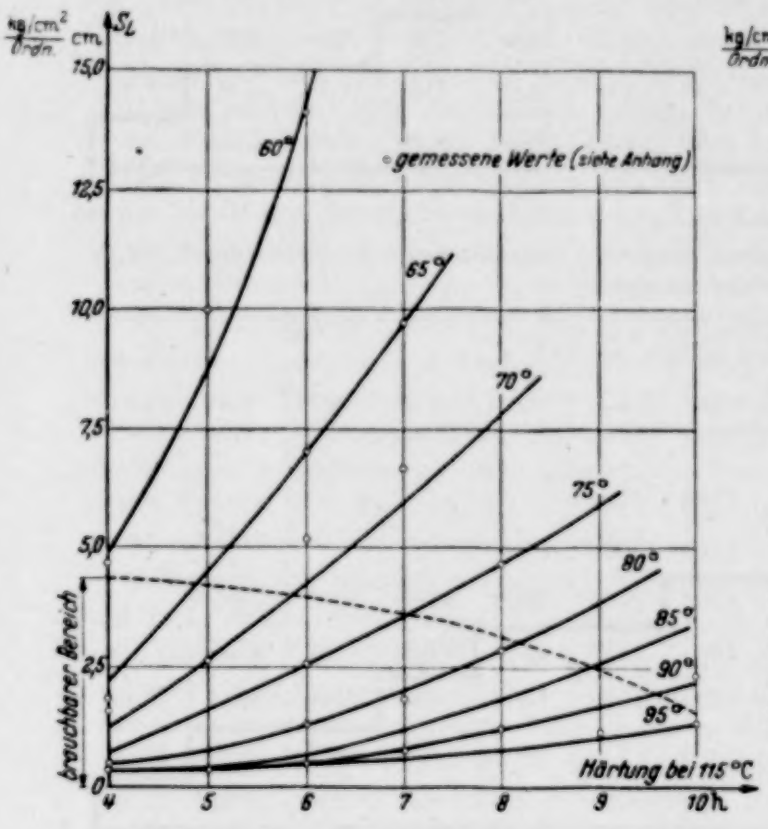


Abb. 1. Spannungsoptische Konstante S_L für das Erstarrungsverfahren bei konstanter Last. Versuchstemperatur als Parameter.

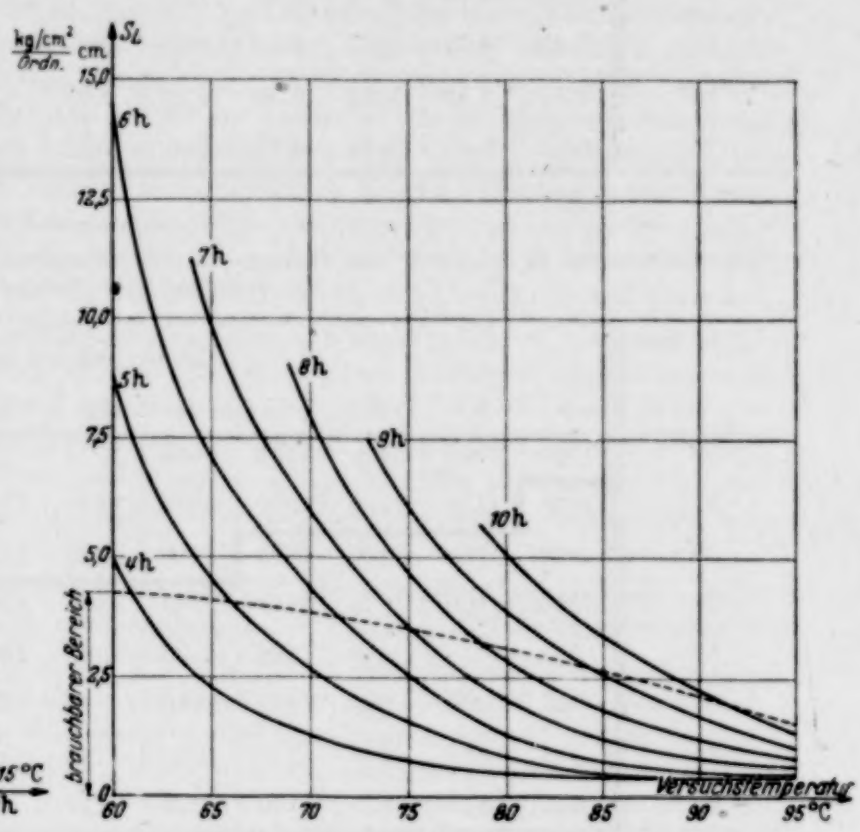


Abb. 2. Spannungsoptische Konstante S_L für das Erstarrungsverfahren bei konstanter Last. Härtung in Std. bei 115° als Parameter.

des empfindlichen Bereiches, wo die spannungsoptische Konstante sich mit der Härtung bzw. mit der Versuchstemperatur stark ändert. Dann läuft man wenigstens nicht Gefahr, daß sich die tatsächlich einstellende spannungsoptische Konstante um ein Vielfaches von der beabsichtigten unterscheidet.

Die Abb. 1 und 2 geben auch eine Übersicht, welche Fehler dadurch entstehen können, daß ein Modell durch ungleichmäßige Temperaturverteilung beim Härten oder durch ungleichmäßiges Erwärmen beim Erstarrungsversuch stellenweise verschiedene mechanische Eigenschaften besitzt. Auch in solchen Fällen ist der empfindliche Bereich ungünstig, und es muß nach Möglichkeit danach getrachtet werden, von ihm abzurücken, um die Fehler herabzumindern. Dies kann entweder dadurch geschehen, daß man von vornherein weniger stark härtet, oder, wenn das Modell schon fertig ist, eine so hohe Versuchstemperatur wählt, daß man aus dem empfindlichen Bereich herauskommt. Endlich ist es an Hand der Abb. 1 und 2 bzw. der Tafeln 3 und 4 ganz allgemein möglich, die spannungsoptische Konstante bzw. den Elastizitätsmodul in ziemlich weiten Grenzen zu verändern, je nachdem dies das jeweilige Problem erfordert. Man muß nur darauf achten, daß man innerhalb des umrandeten Gebietes der Tafeln 3 und 4 bleibt. Dann nimmt man höchstens eine etwas schlechtere Ausbeute an optischem Effekt in Kauf, je mehr man sich von der günstigen Härtung entfernt.

e) Erstarrungsverfahren bei konstanter Formänderung. Für das Erstarrungsverfahren bei konstanter Formänderung sind die in Abb. 8 bis 10 der früheren Arbeit des Verfassers[1] aufgetragenen Größen maßgebend, da sie in diesem Verfahren gewonnen wurden.

Einfach ist die Frage der Materialkonstanten meist bei den am Schluß des Abschnitts 3c erwähnten Spezialfällen, bei denen auf die Messung der Kräfte verzichtet werden kann. Hier braucht man zur Dimensionierung der Verformungen meist nur die effektive dehnungsoptische Konstante D_e, die definiert ist als die nach der Abkühlung gebliebene Isochromatenordnung pro beim Versuch aufgewandte Dehnung und Modelldicke. Sie beträgt für die günstige Härtung rund $700\ \frac{\text{Ordn.}}{\text{cm}}$. (Siehe hierüber auch den Schluß des Abschnittes 4, d.)

Das allgemeine Verfahren konstanter Formänderung, das jedoch aus den in Abschnitt 3, c diskutierten Gründen nur angewandt werden soll, wenn unbedingt nötig, d. h. nur bei Problemen mit gegebenen Formänderungsgrößen, ist zunächst eine besondere spannungsoptische Konstante zu definieren. Diese spannungsoptische Konstante S_F für das Erstarrungsverfahren bei konstanter Formänderung soll diejenige Hauptspannungsdifferenz bedeuten, die zu Beginn des Versuchs nötig ist, damit in einem Schnitt von 1 cm Dicke durch das erkaltete Modell bei Natriumlicht die Isochromate erster Ordnung auftritt, wenn der Erstarrungsversuch bei konstanter Formänderung durchgeführt und die Temperatur während zweier Stunden nach der Belastung konstant gehalten und dann um 10° je Stunde gesenkt worden ist.

Der Zusammenhang zwischen S_F und den in Abb. 8 bis 10 der zitierten Arbeit[1] verwendeten Größen D_e und E_0 ist gegeben durch die Gleichung:

$$S_F = \frac{E_0}{D_e}.$$

E_0 ist das Verhältnis Spannung zu Dehnung im Augenblick der Belastung.

Für die günstige Härtung von 7 Stunden bei 115° C ist $D_e = 705$ Ordnung/cm, $E_0 = 4600$ kg/cm², somit also $S_F = 6{,}5\ \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}} \cdot \text{cm}$. Für den ersten Überschlag kann mit diesen Größen gerechnet werden. Doch ist auch hier die im vorigen Abschnitt erwähnte Tatsache zu bedenken, daß die günstige Härtungszeit je nach Material schwankt und daher am besten zunächst nach der dort angegebenen Methode für das vorliegende Material festgestellt wird.

Vor dem Versuch müssen spannungsoptische Konstante S_F und Elastizitätsmodul E_0 genau bekannt sein, da von ihnen die Maßstäbe für Formänderungen und Kräfte abhängen (siehe Abschnitt 4, c). Die spannungsoptische Konstante kann an einem gleichzeitig mit dem Modell gehärteten Probestab mit Hilfe der in Abschnitt 6, b noch zu beschreibenden Eichvorrichtung gemessen werden, doch müssen größere Gewichte verwendet werden, da die spannungsoptischen Konstanten S_F größer sind als diejenigen für das Verfahren konstanter Last. Zur Bestimmung von S_F muß der Probestab in genau derselben Weise behandelt werden wie nachher beim Versuch das Modell. Wichtig ist, daß genau dieselbe Temperatur eingehalten wird. Nach Aufbringen der Gewichte wird die Formänderung arretiert, und zwar müßte dies streng genommen sofort darnach geschehen. Praktisch muß man jedoch einige Zeit verstreichen lassen, und zwar dieselbe Zeitspanne, die hernach beim Versuch zwischen Aufbringen der Last und dem Arretieren der Formänderung verstreicht. Bezüglich dieser Zeitspanne muß man einen gewissen Kompromiß schließen. Einerseits bedeutet, wie auch am Schluß des Abschnittes 4 e erwähnt, jede Zeit, die bis zur Arretierung der Verformung verstreicht, eine Fehlerquelle, da während dieser Zeit im Spannungszustand Veränderungen vorgehen. Andererseits ist es aber auch wichtig, daß die Zeitspanne, wenn einmal unvermeidlich, wenigstens bei Haupt- und Eichversuch genau gleich lang ist. Da aber der genaue Beginn der Belastung meist eine etwas unsichere Sache ist, namentlich wenn mehrere Lasten durch Federdynamometer aufgebracht werden, die immer wieder nachgestellt werden müssen, wird man oft eine Zeitspanne von etwa bis zu 5 Minuten in Kauf nehmen, damit die Unsicherheit des Belastungsbeginns nicht so sehr ins Gewicht fällt.

Nach der Arretierung wartet man in üblicher Weise 2 Stunden und kühlt hierauf um 10° je Stunde ab, worauf man aus der Anzahl der Isochromaten im Probestab S_F bestimmen kann. Den Elastizitätsmodul E_0 findet mit Hilfe der obigen Gleichung durch Probieren aus Abb. 8 bis 10 der zitierten Arbeit.

[1] Siehe Fußnote 5 von S. 267.

4. Das Modellgesetz und seine Anwendung. a) Allgemeines. Für die spannungsoptischen Versuche ist das statische Modellgesetz anzuwenden. Es bedeute im folgenden in irgend einem Teil der Hauptausführung K eine Kraft, F die Fläche senkrecht zur Kraft, L eine Länge, (σ) die durch K hervorgerufene Spannung, ΔL die infolge von K eintretende Änderung von L, (E) den Elastizitätsmodul der Hauptausführung.

Die entsprechenden Größen an derselben Stelle des Modells seien mit k, f, l, σ, Δl und E bezeichnet. Vorausgesetzt wird für Hauptausführung und Modell das Elastizitätsgesetz (*Hooke*sches Gesetz). Es lautet für die Hauptausführung[1]:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{(\sigma)}{(E)} = \frac{K}{F(E)}$$

und für das Modell

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{k}{f E} .$$

Zunächst ist geometrische Ähnlichkeit zu fordern, d. h. das Verhältnis jeder Länge L der Hauptausführung muß zur entsprechenden Länge l des Modells dasselbe Verhältnis $L/l = \lambda$ besitzen. Das Verhältnis der Spannungen ergibt sich aus obigen Gleichungen zu

$$\frac{(\sigma)}{\sigma} = \frac{\Delta L}{\Delta l} \frac{l}{L} \frac{(E)}{E} . \tag{1}$$

Da ΔL und Δl als Länge das Maßstabverhältnis λ besitzen müssen, folgt

$$\frac{(\sigma)}{(E)} = \frac{\sigma}{E} . \tag{2}$$

d. h. das strenge statische Ähnlichkeitsgesetz verlangt, daß die Dehnungen in Hauptausführung und Modell dieselben sind.

Diese Forderung kann nun bei den spannungsoptischen Versuchen meist nicht eingehalten werden, da die Formänderungen der Kunstharze größer sind als die der Werkstoffe Stahl, Beton u. dgl., aus denen die zu untersuchenden Hauptausführungen meist bestehen. Ein Beispiel möge dies erläutern. Angenommen ein zu untersuchender Konstruktionsteil aus Stahl werde an seiner höchstbeanspruchten Stelle mit $(\sigma) = 2000\ \mathrm{kg/cm^2}$ auf Zug beansprucht. Ein Modell des Teiles von 1 cm Dicke aus gehärtetem Dekorit vom E-Modul $E = 36\,000\ \mathrm{kg/cm^2}$ würde dann nach dem strengen Ähnlichkeitsgesetz an der entsprechenden Stelle eine Spannung $\sigma = (\sigma)\, E/(E) = 2000 \cdot 36000/2{,}1 \cdot 10^6 = 34\ \mathrm{kg/cm^2}$ aufweisen, was etwa die Farbgleichenordnung $2\frac{1}{2}$ an dieser Stelle ergäbe. Diese geringe Ordnung an der höchstbeanspruchten Stelle wäre für eine genaue Auswertung völlig unzureichend und hieße die optischen Eigenschaften von Dekorit, mit dem man mit Leichtigkeit die 20. Ordnung erreicht, schlecht ausnützen. Würde der Versuch nach der strengen Ähnlichkeit im Erstarrungsverfahren durchgeführt, etwa mit dem Elastizitätsmodul $E_L = 1300\ \mathrm{kg/cm^2}$ und der spannungsoptischen Konstante $S_L = 2\ \mathrm{kg/cm} \cdot$ Ordnung, so wäre beim Modell $\sigma = 1{,}24\ \mathrm{kg/cm^2}$. Ein Schnitt von 4 mm Dicke würde nur die Ordnung 0,25 zeigen. Dieses Beispiel zeigt, daß man vor allem beim Erstarrungsverfahren, aber, wenn auch in geringerem Maße, auch in der ebenen Spannungsoptik, mit größeren bezogenen Formänderungen arbeiten, das heißt die geometrische Ähnlichkeit in den Formänderungen fallen lassen muß.

Dies ist nun glücklicherweise in den meisten Fällen ohne weiteres statthaft, nämlich dann, wenn die Formänderungen noch mit genügend Annäherung als klein gegen die geometrischen Abmessungen angesehen werden können, d. h. wenn durch die Formänderungen die geometrische Ähnlichkeit nicht gestört wird. Dann wird in allen Teilen von Hauptausführung und Modell auf Grund des Elastizitätsgesetzes sich ein ähnlicher Spannungszustand einstellen, auch wenn die Formänderungen nicht geometrisch ähnlich gemäß dem Längenmaßstab λ sind. Man darf vielmehr dann einen eigenen, von λ unabhängigen Formänderungsmaßstab $\lambda_1 = \Delta L/\Delta l$ beliebig wählen. Man benützt hier, mit anderen Worten ausgedrückt, nichts anderes als die bekannte Tatsache, daß bei jedem Spannungszustand im allgemeinen die Spannungen den äußeren Lasten proportional sind.

---

[1] Die Querdehnung bleibt in folgendem unberücksichtigt. Der Umstand, daß Modell und Hauptausführung im allgemeinen verschiedene Querdehnungszahlen besitzen, beeinträchtigt unter Umständen die Strenge des Modellgesetzes, doch sind die dabei auftretenden Fehler immer geringfügig. Vgl. hierüber: *Föppl-Neuber* (Fußnote 1 von S. 267).

Mit Einführung des Formänderungsmaßstabes λ_1 erhält man aus Gleichung (1) ein erweitertes statisches Ähnlichkeitsgesetz von der Form

$$\frac{(\sigma)}{(E)} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\,\frac{\sigma}{E}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{(\sigma)}{\sigma} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\,\frac{(E)}{E}. \tag{3}$$

Der Quotient λ_1/λ ist der Maßstab der Dehnungen. Ist er gleich eins, so hat man strenge statische Ähnlichkeit.

Die Maßstäbe $\varkappa$ für die Kräfte und μ für die Momente im erweiterten statischen Ähnlichkeitsgesetz ergeben sich zu

$$\varkappa = \frac{K}{k} = \frac{(\sigma)\,F}{\sigma f} = \frac{(\sigma)}{\sigma}\,\lambda^2 = \lambda_1\,\lambda\,\frac{(E)}{E} \tag{4}$$

und

$$\mu = \varkappa\,\lambda = \lambda_1\,\lambda^2\,\frac{(E)}{E}. \tag{5}$$

Ob die erweiterte statische Ähnlichkeit zulässig ist, muß im Einzelfalle entschieden werden. Ein Beispiel, wo dies nicht der Fall ist, ist die Plattenbiegung. Würde man die Biegung von Platten im Erstarrungsverfahren untersuchen, so müßte man so große Durchbiegungen anwenden, daß sich die Plattenmittelfläche unzulässig stark von der ursprünglichen geometrischen Form der Ebene entfernt. Es käme dann beim Modell zum Biegungsspannungszustand noch ein Längsspannungszustand hinzu, der in der Hauptausführung nicht vorhanden ist. Ein weiteres Beispiel sind alle Stabilitätsprobleme, für die ja gerade charakteristisch ist, daß im kritischen Gebiet die Proportionalität zwischen Last und Formänderung aufhört. Stabilitätsuntersuchungen im Verein mit spannungsoptischen Messungen sind daher nicht möglich.

Probleme, für die das erweiterte Ähnlichkeitsgesetz nicht mehr zulässig ist, sind spannungsoptisch nicht exakt zu lösen. Es käme höchstens noch bei ebenen Spannungszuständen als Ausweg in Frage, das Modell so dick zu machen, daß man bei strenger Ähnlichkeit noch einen genügenden optischen Effekt erhält, meist gelingt es jedoch bei dicken Modellen nicht mehr, einen einwandfreien ebenen Spannungszustand herzustellen. Beim Erstarrungsverfahren kommt auch dieser Ausweg nicht in Frage, sondern man muß entweder die aus der unvollkommenen Ähnlichkeit entspringenden Fehler in Kauf nehmen oder auf die optische Ermittlung der Spannungen verzichten.

b) Der Sonderfall des ebenen Spannungszustandes. Der ebene Spannungszustand ist dadurch charakterisiert, daß er in einer Dimension, nämlich in Richtung der Dicke des Modells, unveränderlich ist. Daher bleibt beim ebenen Modellversuch der Spannungszustand immer derselbe, gleichgültig, welche Dicke man dem Modell gibt, vorausgesetzt, daß es wirklich gelingt, einen einwandfrei ebenen Spannungszustand herzustellen. Mit anderen Worten, man darf in der ebenen Spannungsoptik einen weiteren Maßstab, den Dickenmaßstab δ beliebig wählen. Bezeichnet man die Dicke der Hauptausführung mit D und die des Modells mit d, so daß $\delta = D/d$ ist, so hat man für eine Kraft die Beziehungen

$$K = (\sigma) S\,D \quad \text{bzw.} \quad k = \sigma\,s\,d, \tag{6}$$

wo S bzw. s eine Längenabmessung bedeutet. Damit erhält man ein erweitertes statisches Ähnlichkeitsgesetz für den ebenen Spannungszustand folgenden Inhalts: Unverändert bleibt Gleichung (3) für den Spannungsmaßstab

$$\frac{(\sigma)}{\sigma} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\,\frac{(E)}{E}.$$

Unter Benützung von (4) ergibt sich für den Kräftemaßstab

$$\varkappa = \frac{(\sigma)}{\sigma}\,\lambda\delta = \lambda_1\,\delta\,\frac{(E)}{E}, \tag{7}$$

da S und s dem Längenmaßstab λ gehorchen müssen, und für den Maßstab der Momente

$$\mu = \lambda_1\,\lambda\,\delta\,\frac{(E)}{E}. \tag{8}$$

Von den Maßstäben λ, λ_1, δ, $\varkappa$, $(\sigma)/\sigma$, μ können in der ebenen Spannungsoptik drei beliebig gewählt werden.

Setzt man wieder $\lambda_1 = \lambda$, so hat man strenge statische Ähnlichkeit in der Ebene (Gleichheit der Dehnungen), setzt man weiter $\delta = \lambda$, so erhält man das allgemeine statische Ähnlichkeitsgesetz.

c) Sonderfälle mit gegebenen Formänderungsgrößen. Bei vielen Problemen sind außer den gegebenen Belastungen gewisse Formänderungsgrößen vorgegeben. Man denke z. B. an mehrfach gelagerte Baukonstruktionen, bei deren Berechnung berücksichtigt werden muß, daß sich einzelne Auflager unter der Belastung setzen können. Im Modellversuch kann man dies berücksichtigen, indem man die betreffenden Auflagerstellen von vornherein tiefer legt, so daß im unbelasteten Zustand Zwischenräume zwischen Tragwerk und Auflager vorhanden sind, die sich erst bei der Belastung schließen. Bei derartigen Versuchen ist nun wohl zu beachten, daß die genannten Zwischenräume den Formänderungen zuzurechnen sind und daher für ihre Bemessung der Formänderungsmaßstab λ_1, nicht der Längenmaßstab λ maßgebend ist.

Hierher gehören auch alle jene Fälle, wo zwischen Konstruktionsteilen ein Spiel besteht, das durch die für die Fertigung zugelassenen Toleranzen bedingt ist. In solchen Fällen entsteht dann eine kraftschlüssige Verbindung erst im Laufe der Belastung, meist nur in gewissen Bereichen der Konstruktion. Ein einfaches Beispiel dieser Art wäre etwa ein zylindrischer Hohlkörper, der mit geringem Spiel in einen Hohlraum eingepaßt ist und unter hohem Innendruck sich an die Wand des Hohlraumes anlegt. Das Spiel ist nicht geometrisch ähnlich, sondern nach dem Formänderungsmaßstab auszuführen.

Da die bezogenen Formänderungen bei spannungsoptischen Versuch immer größer gewählt werden müssen als in der Wirklichkeit, wird das Spiel beim spannungsoptischen Modell auch immer größer sein als in der Wirklichkeit. Dies bedeutet eine Erleichterung in der Modellherstellung, da an die Genauigkeit der Ausführung dann ebenfalls nicht dieselben Anforderungen gestellt zu werden brauchen als bei der Hauptausführung.

Soll ein Problem mit vorgegebenen Formänderungsgrößen im Erstarrungsverfahren untersucht werden, so darf nur das Verfahren konstanter Formänderung (siehe Abschnitt 3, c und e) angewandt werden. Daß das Verfahren konstanter Last unbrauchbar ist, kann an dem Beispiel der Brücke mit Auflagersenkungen leicht eingesehen werden. Brächte man hier die konstanten Lasten auf, so würden die gesenkten Auflager zunächst nur kleine Kräfte aufnehmen, die dann mit der Zunahme der Formänderungen, die bei diesem Verfahren charakteristisch ist, ständig größer werden. Der Spannungszustand würde sich also während des Versuchs dauernd ändern, und das Ergebnis wäre ein Gemisch aller dieser Spannungszustände.

d) Die Wahl der Maßstäbe. Hat man eine spannungsoptische Untersuchung durchzuführen, so ist zunächst die Größe des Modells und damit der Längenmaßstab λ festzulegen. Grundsätzlich steigt mit der Modellgröße die Genauigkeit. Doch sind der Größe des Modells, hauptsächlich durch die apparativen Möglichkeiten, Grenzen gesetzt.

Als Modelldicke in der ebenen Spannungsoptik wird man meist 10 mm wählen. Diese Dicke hat sich praktisch als vorteilhaft erwiesen. Einerseits erhält man mit ihr einen allen Ansprüchen genügenden optischen Effekt, andererseits gelingt es erfahrungsgemäß immer, mit solchen Modellen einen sauberen ebenen Spannungszustand zu erreichen. Mit der Dicke ist der Dickenmaßstab δ festgelegt.

Räumliche Modelle sollen mindestens so groß sein, daß in Scheiben von 3 bis 4 mm Stärke, die an interessierenden Stellen herausgeschnitten werden, ein praktisch noch als homogen anzusehender Spannungszustand herrscht. In der Größe der räumlichen Modelle ist man hauptsächlich dadurch beschränkt, daß das Modell samt Belastungsvorrichtung in einem elektrischen Ofen untergebracht werden muß. Ferner ist zu beachten, daß wegen des kleinen Elastizitätsmoduls, mit dem beim Erstarrungsverfahren gearbeitet wird, oft das Eigengewicht des Modells die Ergebnisse fälschen kann, wenn das Modell zu groß ausgeführt wird. Man muß daher darnach trachten, die Modelle beim Erstarrungsversuch so aufzustellen, daß der Einfluß des Eigengewichtes möglichst gering bleibt. Unter Umständen muß man die durch das Gewicht zusätzlich hervorgerufenen Spannungen abschätzen und von den Ergebnissen in Abzug bringen.

Von großer Wichtigkeit ist es, den Kräftemaßstab richtig festzulegen, um einerseits einen für die Auswertung genügend hohen optischen Effekt zu erreichen, andererseits eine Überbeanspruchung der Modelle zu vermeiden, die zu Brüchen führen könnte. Unumgänglich notwendig ist eine sorgfältige Bestimmung des Kräftemaßstabes vor dem Versuch beim Erstarrungsverfahren, da der Versuch nicht wiederholt werden kann. Aber auch beim ebenen spannungsoptischen Versuch ist ein vorheriger Überschlag immer zu empfehlen, damit die Einspannvorrichtung richtig dimensioniert und beurteilt werden kann, ob die vorhandenen Kraftmeßeinrichtungen ausreichen.

Es empfiehlt sich meist folgender Weg zur Bestimmung des Kräftemaßstabes. Die höchste in der zu untersuchenden Konstruktion auftretende Hauptspannungsdifferenz $(\sigma_1)-(\sigma_2)$ wird

zunächst möglichst genau abgeschätzt. Dies kann z. B. mit den zur Verfügung stehenden Mitteln der Elastizitätstheorie geschehen. Handelt es sich um eine Konstruktion, die im Betrieb versagt hat und deshalb untersucht werden soll, so kann man häufig als höchste Beanspruchung die Dauerfestigkeit bzw. Streckgrenze des betreffenden Werkstoffes annehmen. Soll die Berechnung einer Konstruktion überprüft werden, so kommt unter Umständen auch die zulässige Spannung, mit der gerechnet wurde, in Frage. Die höchste Hauptspannungsdifferenz $(\sigma_1)-(\sigma_2)$ soll nun an der entsprechenden Stelle des Modells durch eine angemessene Isochromatenordnung n wiedergegeben werden. Ist die Hauptspannungsdifferenz an dieser Stelle des Modells $\sigma_1-\sigma_2$, die spannungsoptische Konstante des Modellwerkstoffes S und die Dicke des ebenen Modells bzw. des aus dem räumlichen Modell herausgearbeiteten Schnittes d, so besteht die Beziehung

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{S\,n}{d}\,.$$

Hieraus ergibt sich der Spannungsmaßstab zu

$$\frac{(\sigma)}{\sigma} = \frac{(\sigma_1)-(\sigma_2)}{\sigma_1-\sigma_2} = \frac{(\sigma_1)-(\sigma_2)}{S\,n}\,d\,. \tag{9}$$

Als Richtlinien für die Wahl der Isochromatenordnung n an der höchstbeanspruchten Stelle kann nach praktischen Erfahrungen gelten: $n=10$ bis 15 für ebene Modelle von 1 cm Dicke. Für kleine Modelldicken ist n unter Umständen geringer zu wählen, so daß $\sigma_1-\sigma_2$ nicht zu hoch wird. Die zulässigen Werte sind nach den Angaben für die Festigkeit von gehärtetem Dekorit in Abschnitt 3 b zu beurteilen.

Für räumliche Versuche bei Schnitten von 3 bis 4 mm Stärke $n=6$ bis 8.

Als spannungsoptische Konstante S sind die in Abschnitt 3b, d und e angegebenen Werte einzusetzen. Beim Erstarrungsverfahren sind die dort gemachten Bemerkungen besonders sorgfältig zu beachten.

Ist der Spannungsmaßstab nach Gleichung (9) festgelegt, so können die übrigen Maßstäbe nach den Beziehungen (3), (4) und (5) bzw. (7) und (8) berechnet werden. Bei Problemen mit vorgegebenen Formänderungsgrößen ist zu beachten, daß in die Berechnung des Formänderungsmaßstabes λ_1 die Elastizitätsmoduln von Hauptausführung und Modell eingehen. Diese müssen daher bekannt sein.

Es sei noch bemerkt, daß die obige Festsetzung der Maßstäbe über den Spannungsmaßstab nur als Überschlag zu betrachten ist. Bei der endgültigen Festsetzung wird man oft aus Zweckmäßigkeitsgründen einen der erhaltenen Maßstäbe aufrunden, um beim Versuch mit bestimmten einfachen Werten von gegebenen Größen, z. B. Durchbiegungen oder Kräften, arbeiten zu können, und dann die übrigen Maßstäbe darnach neu berechnen. In der ebenen Spannungsoptik ist es z. B. oft zweckmäßig, an einem bestimmten Modellpunkt eine ganzzahlige Isochromatenordnung einzustellen und durch diese Belastung den Kräftemaßstab festzulegen.

Eine Sonderstellung bei der Dimensionierung der Belastung nimmt das Erstarrungsverfahren bei konstanter Formänderung, wenn keine Kraft gemessen wird, ein. In diesem Fall geht man von der dehnungsoptischen Konstante D_ε aus, die bei der günstigen Härtung rund 700 Ordnungen/cm beträgt. Die Dehnung ε, die an der höchstbeanspruchten Stelle erforderlich ist, um bei einer Schnittdicke d die Ordnung n zu erzeugen, ist

$$\varepsilon = \frac{n}{D_\varepsilon\,d}\,,$$

die dazugehörige Spannung $\sigma=\varepsilon\,E$, wenn E der Elastizitätsmodul ist, der aber nicht bekannt zu sein braucht. Nun rechnet man sich mit den Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie angenähert aus, welche äußere Last k die Spannung σ hervorruft, und ferner, welche Durchsenkung f der Angriffspunkt von k erfährt. Diese beiden Gleichungen haben immer die Form:

$$k = c_1\,\sigma \quad \text{und} \quad f = c_2\,\frac{k}{E}\,,$$

wo c_1 und c_2 nur von den Modellbemessungen abhängen. Durch Kombination dieser beiden Gleichungen mit der vorher erhaltenen erhält man schließlich die Verformung f, die das Modell erhalten muß.

$$f = c_1\,c_2\,\frac{n}{D_\varepsilon\,d}\,.$$

e) Beispiele.

1) Für einen Nockenhebel aus Stahl soll festgestellt werden, bei welcher Last P die Streckgrenze von $(\sigma_s)=2800$ kg/cm² überschritten wird. Die Form des Hebels sowie die Beanspruchung geht aus Abb. 3 hervor. Ferner soll eine Form des Hebels gefunden werden, bei der bei gleicher Anstrengung eine höhere Kraft P zulässig ist. Der Hebel ist etwa 100 mm hoch und hat eine überall gleiche Stärke von 10 mm.

Es handelt sich um ein ebenes Problem. Zweckmäßiger Längenmaßstab: $\lambda=0{,}5$. Damit wird das Modell 200 mm hoch. Modelldicke: 1 cm, folglich ist der Dickenmaßstab $\delta=1$.

Überschlag der aufzuwendenden Kraft: Schwächste Stelle vermutlich bei der unteren Ausrundung am Nocken. Nach der elementaren Biegungstheorie ist mit Hebelarm $a=6{,}5$ cm und Widerstandsmoment $W=1$ cm³ im Querschnitt $x-x$ der Hauptausführung die Kraft P roh angenähert $P=(\sigma_s)\,W/a=430$ kg. Im Modell soll etwa die 10. Isochromatenordnung erreicht werden. Dann wird nach (9) der Spannungsmaßstab

$$\frac{(\sigma)}{\sigma}=\frac{(\sigma_s)}{S\,n}\,d=\frac{2800}{14\cdot 10}\cdot 1=20$$

und nach (7) der Kräftemaßstab

$$\varkappa=\frac{(\sigma)}{\sigma}\,\lambda\,\delta=20\cdot 0{,}5\cdot 1=10\,,$$

also die Kraft p beim Versuch $p=P/\varkappa=43$ kg. Darnach wäre die Belastungsvorrichtung zu dimensionieren.

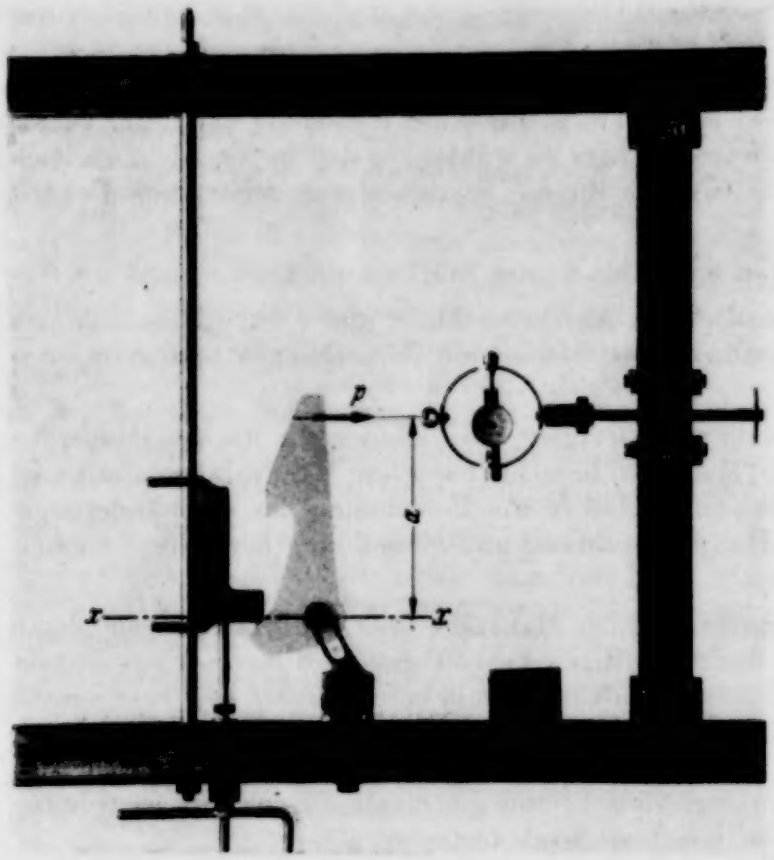


Abb. 3. Dekoritmodell eines Nockenhebels in der Belastungsvorrichtung.

Der tatsächliche Spannungszustand weicht erheblich von der rohen Schätzung nach der elementaren Theorie ab. Es genügte beim Versuch $F=15$ kg. Dabei ergibt sich schon die höchste Isochromatenordnung zu 11,0 (Abb. 4). Der Eichversuch ergab $S=13{,}8\ \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}}$ cm. Damit erhält man jetzt den Spannungsmaßstab zu

$$\frac{(\sigma)}{\sigma}=\frac{2800}{13{,}8\cdot 11}\cdot 1=18{,}45$$

und den Kräftemaßstab zu $\varkappa=9{,}23$. Die gesuchte Kraft, bei der die Streckgrenze überschritten wird, beträgt also $P=\varkappa\,p=138$ kg.

Das Isochromatenbild 5 zeigt eine günstigere Formgebung des Hebels. Bei einer Kraft p von ebenfalls 15 kg tritt hier nur die 7,5te Isochromate auf. Bei dieser Form darf also P um das Verhältnis 11,0/7,5 größer sein, also 203 kg betragen.

2) Die Berechnung einer statisch unbestimmt gelagerten Rostbrücke aus Stahlbeton soll mit Hilfe eines Modells im Maßstab 1:100 nachgeprüft werden. Die Einzelträger seien prismatisch, so daß sie im ebenen spannungsoptischen Verfahren untersucht werden können, und mögen im Modell eine Dicke von 8 mm besitzen. Bei der Berechnung sei zur Sicherheit eine Senkung der Mittelstützen um 5 cm angenommen worden. Die höchste Spannung sei zu 150 kg/cm² festgestellt worden. Der E-Modul für Stahlbeton sei zu 210000 kg/cm² angenommen. Für das Modell sei der E-Modul zu 34000 kg/cm², die spannungsoptische Konstante zu $13{,}5\ \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}}\cdot\text{cm}$ ermittelt worden.

Wird an der höchstbeanspruchten Stelle die Isochromate zehnter Ordnung gewünscht, so ist der Spannungsmaßstab nach (9)

$$\frac{(\sigma)}{\sigma}=\frac{(\sigma_1)-(\sigma_2)}{S\,n}\,d=\frac{150}{13{,}5\cdot 10}\,0{,}8=0{,}89\,.$$

Nach (3) ergibt sich der Formänderungsmaßstab zu

$$\lambda_1 = \lambda \frac{(\sigma)}{\sigma} \frac{E}{(E)} = 100 \cdot 0{,}89 \cdot \frac{34000}{210000} = 14{,}4 .$$

Aus experimentellen Zweckmäßigkeitsgründen werde λ_1 jedoch zu 12,5 gewählt. Dann wird das den Auflagersenkungen entsprechende Spiel an den Auflagern des Modells $50/\lambda_1 = 4$ mm. Der endgültige Spannungsmaßstab wird dann $(\sigma)/\sigma = 0{,}775$, der Kräftemaßstab $\varkappa = \lambda^2 (\sigma)/\sigma = 775$.

3) Ein Betonierkörper eines Wasserkraftwerkes soll an einem Modell im Maßstab 1:100 im Erstarrungsverfahren untersucht werden. Die Belastungen durch Wasserdruck und Gewichtskräfte seien näherungsweise in vier Resultierende zusammengefaßt worden, von denen die größte $R = 5000$ t beträgt Als höchste Spannung in dem teilweise zu armierenden Beton wird 50 kg/cm² erwartet. Als Belastungsorgane sollen Kraftmesser mit 200 kg Höchstlast zur Verfügung stehen.

Da keine Formänderungsbeträge vorgegeben sind, kann der Versuch bei konstanter Last durchgeführt werden.

Ein Versuch mit einem gleichzeitig mit dem Modell gehärteten Biegestab habe eine spannungsoptische Konstante $S_L = 3{,}5 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}} \cdot \text{cm}$ für 80° C Versuchstemperatur ergeben. Das Modell ist also etwas zu stark gehärtet.

Die maximale Spannung soll bei 4 mm Schnittdicke durch die achte Isochromatenordnung wiedergegeben werden. Nach (9) wird der Spannungsmaßstab

$$\frac{(\sigma)}{\sigma} = \frac{(\sigma_1) - (\sigma_2)}{S_L n} d = \frac{50 \cdot 0{,}4}{3{,}5 \cdot 8} = 0{,}715$$

und der Kräftemaßstab

$$\varkappa = \lambda^2 \frac{(\sigma)}{\sigma} = 7150 .$$

Die Last R erhält demnach am Modell die Größe

$$r = \frac{R}{\varkappa} = \frac{5000000}{7150} = 700 \text{ kg},$$

übersteigt also die Leistungsfähigkeit der vorhandenen Mittel. Um trotzdem einen genügend hohen optischen Effekt zu erzielen, muß die spannungsoptische Konstante erniedrigt werden. Dies geschieht, wie Tafel 4 zeigt, indem eine höhere Versuchstemperatur gewählt wird, z. B. 95° C. Dann wird $S_L = 0{,}95$, $(\sigma)/\sigma = 2{,}63$, $\varkappa = 26300$. Die Kraft r wird 190 kg und kann somit durch die vorhandenen Mittel aufgebracht werden. Gleichzeitig rückt man mit den Versuchsbedingungen, wie Abb. 1 zeigt, aus dem empfindlichen Gebiet heraus.

Abb. 4. Isochromatenbild des Nockenhebels. $p = 15$ kg.

Abb. 5. Verbesserte Form. $p = 15$ kg.

5. Die Herstellung der Modelle aus Dekorit. a) Allgemeines. 1) Bearbeitung. Die Modelle werden aus Platten oder Blöcken nur durch spanabhebende Bearbeitung hergestellt. Bei der Bearbeitung ist oberster Grundsatz, daß dabei keine Eigenspannungen in das Modell hineinkommen dürfen. Besonders bei Modellen, die vor der Bearbeitung gehärtet werden und hernach keine Wärmbehandlung mehr erfahren, ist dies wichtig. Man vermeidet die Eigenspannungen, indem man die Wärmeentwicklung möglichst gering hält und unnötigen Druck des Werkzeugs auf das Werkstück tunlichst vermeidet. Es hängt viel von dem Geschick des Mechanikers ab. Er muß sich selbst Erfahrungen sammeln, wie er seine Werkzeuge am günstigsten schleift, welche Schnittgeschwindigkeiten er am besten anwendet. Vor allem aber muß in der Werkstatt eine einfache spannungsoptische Apparatur stehen, und der Mechaniker im spannungsoptischen Laboratorium muß sich von Anfang an daran gewöhnen, seine Arbeit laufend in ihr zu überprüfen und sich nötigenfalls zu korrigieren.

An Bearbeitungsarten eignen sich am besten solche, bei denen sich entweder das Werkzeug nicht dauernd am Werkstück befindet, so daß es Gelegenheit hat, sich zwischendurch wieder abzukühlen, wie beim Sägen mit Bandsäge und beim Fräsen, oder solche, bei denen das Werkstück laufend eine gute Kühlung erfährt, wie meist beim Drehen. Meist ist es bei diesen Bearbeitungsarten dann nicht nötig, eine künstliche Kühlung anzuwenden. Auch Feilen eignet sich bei einiger Vorsicht, doch darf man nur mit scharfen, neuen Feilen arbeiten. Bohren mit Spiralbohrer ist eine etwas heikle Sache wegen des Mangels an Kühlung, und weil die Gefahr besteht, daß die Späne sich zwischen Werkzeug und Werkstück klemmen. Es gelingt nach einiger Übung, indem man den Bohrer zur Kühlung und zur Auswerfung der Späne in kurzen Abständen senkt und hebt, auch Bohrungen ohne die geringsten Eigenspannungen herzustellen.

Die rohe Form des Modells wird am besten zunächst mit der Bandsäge herausgearbeitet. Man verwendet zweckmäßig ein möglichst schmales Metallsägeblatt, um auch Rundungen sägen zu können. Darnach wird die endgültige Bearbeitung durch Fräsen, Drehen, Feilen usw. vorgenommen.

Da der beim Arbeiten mit Phenolformaldehyd-Kunstharz entstehende Staub die Schleimhäute reizt, muß die spannungsoptische Werkstatt eine Absaugevorrichtung besitzen. Behelfsmäßig genügt oft ein gewöhnlicher Staubsauger.

2) Härtung. Die Härtung erfolgt immer in der Schutzhülle aus Aluminiumfolie. Bei fertigen Modellen ist sie nach den in den folgenden Abschnitten gegebenen Anleitungen besonders sorgfältig anzulegen. Wird nur das Ausgangsmaterial, aus dem das Modell hergestellt wird, gehärtet, so genügt eine Lage Aluminiumfolie auf dem eingeölten Kunstharz.

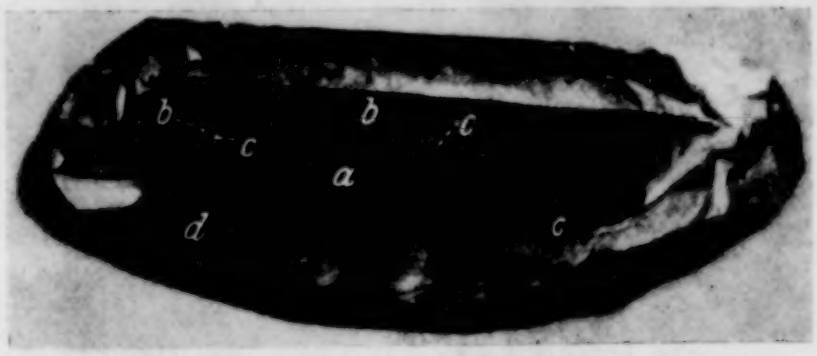


Abb. 6. Modell mit Füllstücken auf dem Hüllblatt.

Alle Teile und alles Ausgangsmaterial für ein bestimmtes Modell sowie der Probestab für den Eichversuch sind gleichzeitig zu härten. Nimmt das Material einen großen Raum ein, so ist genau zu prüfen, ob wirklich überall die gleiche Temperatur herrscht. Namentlich bei Modellen für das Erstarrungsverfahren ist dies wichtig, da sich hier geringe Härteunterschiede stark in den Eigenschaften des Kunstharzes auswirken.

Damit das Kunstharz frei von Eigenspannungen bleibt, ist es besonders wichtig, daß es langsam abgekühlt wird. Die Temperatur soll sich beim Abkühlen im allgemeinen nicht schneller als etwa 10° C pro Stunde senken. Bei größeren Modellen für die ebene Spannungsoptik ist noch langsameres Abkühlen erforderlich, da die ebene Spannungsoptik genauere Messungen gestattet und daher an die Spannungsfreiheit des Modells größere Anforderungen gestellt werden müssen. Eine automatische Abkühlvorrichtung ist zweckmäßig.

Wird bei einer anderen Temperatur als 115° gehärtet, so kann die dafür nötige Härtungsdauer mit Hilfe des Härtungsfaktors (s. Abschnitt 3a) errechnet werden. Sollen mit der Härtung gleichzeitig größere Eigenspannungen beseitigt werden, so wählt man besser eine niedrigere Temperatur. Als Anhalt für die Beseitigung von Eigenspannungen kann ein früher beschriebener Versuch dienen[1]. Er zeigte, daß bei 95° die fünfte Isochromatenordnung in ungehärtetem Dekorit nach 8 Stunden auf etwa die erste zurückgeht und nach 24 Stunden praktisch ganz verschwindet. Systematische Versuche über die günstigste Temperatur sind bisher nicht durchgeführt worden.

Jede Wärmebehandlung, die über 97° C durchgeführt wird, muß in einem Überdruckgefäß ausgeführt werden[2]. Das Gefäß wird vor der Wärmebehandlung mit Luft aufgepumpt und luftdicht verschlossen. Bis 120° C genügt 1 atü, im kalten Zustand gemessen, bis zu 130° C 2 atü.

b) Ebene Modelle. 1) Modelle, die im fertigen Zustand gehärtet werden. Modelle für die ebene Spannungsoptik stellt man im allgemeinen aus beiderseits polierten Platten ungehärteten Dekorits her und härtet sie erst im fertigen Zustand. Dies hat den Vorteil, daß man weder wegen

[1] Siehe Fußnote 5 von S. 267.
[2] Siehe Fußnote 4 von S. 267.

eventuell bei der Bearbeitung entstehender Eigenspannungen besonders vorsichtig zu Werke gehen, noch sich mit Rücksicht auf den entstehenden Randeffekt besonders beeilen muß, da kleinere Eigenspannungen bei der Härtung wieder verschwinden. Das Verfahren eignet sich daher besonders für verwickeltere Modellformen, die eine lange Herstellungszeit erfordern.

Nach Herstellung des Modells erfolgt das Anlegen der Schutzhülle. Dies muß mit großer Sorgfalt geschehen und soll an einem Beispiel durch die Abb. 6 und 7 erläutert werden. Zunächst werden für Bohrungen und konkave Konturen im Modell *a* Füllstücke *b* aus Dekorit roh ausgeschnitten, so daß beim Zusammenlegen zwischen ihnen und dem Modell ein Zwischenraum von ½—1 mm besteht. Damit erreicht man, daß die Hülle um eine überall konvexe Kontur gelegt wird, so daß sie nirgends einreißt. Aus Aluminiumfolie von nicht mehr als 0,01 mm Stärke schneidet man sich nun: zwei Deckblätter *e* von der Kontur des Modells einschließlich der Füllstücke, zwei Hüllblätter *d*, die diese Kontur um etwa 2½ cm überragen, und einige Streifen *c*, deren Breite gleich der Modelldicke ist. Nun wird das erste Hüllblatt auf eine ebene Glasplatte und darauf das Modell mit den Füllstücken gelegt, nachdem beides mit Öl mittlerer Viskosität bestrichen worden ist. Zwischen Modell und Füllstück werden die Streifen *c* gebracht (Abb. 6), die ein Zusammenkleben beim Härten verhindern. Hierauf wird das erste Deckblatt aufgelegt und dann der überstehende Rand des Hüllblattes vorsichtig darübergeschlagen (Abb. 7), wobei Risse im Hüllblatt möglichst vermieden werden müssen. Beim ganzen Vorgang ist darauf zu achten, daß alle Zwischenräume im Innern der Hülle mit Öl ausgefüllt sind und keine Luftblasen enstehen. Zur Sicherheit gegen etwa entstandene Risse in dieser ersten Umhüllung wird das Ganze schließlich nochmals mit Öl bestrichen und mittels des zweiten Deck- und Hüllblattes mit einer zweiten Hülle versehen. Zur Härtung bleibt das vollständig eingehüllte Modell auf der ebenen Glasplatte. Härtung 12 Stunden bei 115° C. Die Hülle wird erst beim Versuch abgenommen.

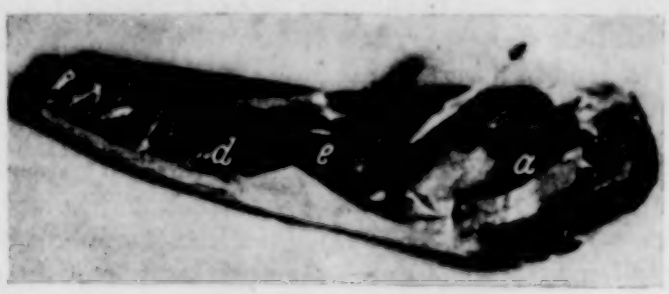


Abb. 7. Anlegen der Schutzhülle.

Ein unter sorgfältiger Beobachtung der obigen Vorschriften hergestelltes Modell ist vollkommen spannungsfrei und erscheint in der spannungsoptischen Apparatur völlig dunkel mit Ausnahme einer nur 0,1 bis 0,2 mm breiten Aufhellung am Rand, die aber kaum stört. Nach Abnahme der Hülle halten sich die Modelle etwa 1 Tag spannungsfrei. Ein gewisser Nachteil ist manchmal, daß sich die Modelle beim Härten geringfügig verziehen können. Stellen, wo dies stört, müssen unter Umständen vor dem Versuch vorsichtig nachgearbeitet werden.

2) Herstellung einfacher Modelle aus vorher gehärtetem Dekorit. Einfache, ebene Modelle, die in ½ bis 1 Stunde angefertigt werden können, kann man auch aus vorher gehärtetem Dekorit herstellen. Die Platte, aus der das Modell hergestellt werden soll, wird in einer einfachen Schutzhülle 7 Stunden bei 115° C gehärtet. Bei der Härtung gehen die in jeder an der Luft gelagerten Platte an der Oberfläche durch Randeffekt hervorgerufenen Eigenspannungen fast vollständig zurück. Dies ist der Grund, warum man aus so gehärteten Platten, wenn die Bearbeitung nicht lange dauert, Modelle von idealer Spannungsfreiheit herstellen kann, die auch den obengenannten Schönheitsfehler der 0,2 mm breiten Aufhellung am Rande nicht besitzen. Wegen der geringeren Härtung neigen sie allerdings ein wenig mehr zum Kriechen und sind an der Luft nicht so haltbar als solche, die 12 Stunden gehärtet worden sind, doch vermeidet man das oft recht umständliche Anlegen einer Schutzhülle an das fertige Modell.

c) Räumliche Modelle. Räumliche Modelle stellt man ebenfalls, wenn irgend angängig, aus ungehärtetem Dekorit her und härtet sie erst im fertigen Zustand. Dies ist jedoch nur möglich, wenn das Modell auf seiner Oberfläche eine größere ebene Stelle besitzt, mit der man es zum Härten auf eine Glasplatte auflegen kann, und außerdem so beschaffen ist, daß nicht beim Härten durch das Eigengewicht merkliche Spannungen entstehen. In vielen Fällen wird man sich daher entschließen müssen, das Modell aus bereits gehärtetem Dekorit herzustellen. Dann ist peinlich darauf zu achten, daß weder durch die Bearbeitung noch durch Randwirkung Eigenspannungen entstehen, da diese nicht mehr entfernt werden können. Fertig bearbeitete Oberflächenteile dürfen höchstens 2 Stunden der Luft ausgesetzt bleiben, wenn sie nicht durch Randwirkung beeinträchtigt werden sollen. Wenn möglich, versieht man die fertig bearbeiteten Stellen laufend mit einer

provisorischen Schutzhülle. Oft ist dies allerdings praktisch schwer durchführbar, da die Schutzhülle die weitere Bearbeitung behindert. Vielfach wird man daher die während der Bearbeitung entstehende Randwirkung in Kauf nehmen müssen. Dann bearbeitet man zuerst diejenigen Stellen des Modells, die weniger interessieren oder an denen überhaupt keine spannungsoptischen Messungen beabsichtigt sind, und erst ganz zum Schluß die wesentlichen Teile.

Bei der Herstellung räumlicher Modelle dürfen die Oberflächenpartien des Ausgangsmaterials, die beim Lagern der Luft ausgesetzt waren, nicht verwendet werden, sondern müssen in einer Schicht von mindestens 3 mm abgenommen werden. Auch wenn das Material in der Schutzhülle gehärtet worden ist, ist dies notwendig, da alte Randwirkung beim Härten nicht ganz beseitigt wird. Eine Ausnahme bilden solche räumliche Modelle, die nur im ebenen spannungsoptischen Verfahren untersucht werden, wie z. B. Blechkonstruktionen von der Art der Abb. 8. Zur Ermittlung des bei solchen Problemen allein wichtigen Längsspannungszustandes genügt nämlich meist die Durchleuchtung senkrecht zur Oberfläche. Der in den Oberflächen durch Randwirkung hervorgerufene Spannungszustand ist aber in seiner Ebene schubspannungsfrei und gibt daher bei senkrechter Durchleuchtung keine optische Wirkung; daher braucht in diesem Fall ebenso wie bei ebenen Modellen die Oberfläche nicht abgenommen zu werden. In solchen Fällen kann man unter Umständen auch auf die Schutzhülle verzichten bzw. braucht nur die Ränder zu schützen, die natürlich gegen Randwirkung anfällig sind.

Sofort nach Fertigstellung erhält das räumliche Modell, das im Erstarrungsverfahren geprüft werden soll, die Schutzhülle aus Öl und Aluminiumfolie. Diese muß auch hier sehr sorgfältig angelegt werden. Man trachte darnach, daß man die Hülle aus nicht zu viel Einzelblättern zusammensetzen muß. Alle Teile müssen sich gut überlappen. Vor allem darf auch hier die Folie nirgends Risse bekommen. Über konkave Kanten legt man die Folie in Streifen, die vorher in parallele Falten von einigen mm Breite gelegt worden sind[1]. Zur Sicherheit gegen nicht zu vermeidende Risse soll die Folie überall mindestens doppelt liegen.

d) Zusammengesetzte Modelle. Dekorit jeden Härtegrades kann mittels des Klebstoffes „Resinol L 5 dünnflüssig", das von der Herstellerfirma Dr. F. Raschig zu beziehen ist, geleimt werden. Dadurch ist man in der Lage, komplizierte Modelle aus mehreren Teilen zusammenzusetzen. Man muß sich jedoch klar darüber sein, daß in der unmittelbaren Umgebung der Leimstellen Störungen durch Randwirkung in Kauf genommen werden müssen, da diese Stellen während der Leimung nicht geschützt werden können. Die unmittelbare Umgebung der Leimstellen ist daher für die Auswertung nicht brauchbar.

Die Einzelteile zusammengesetzter Modelle werden zunächst unter Verwendung der Schutzhülle hergestellt und gehärtet. Müssen Teile eines Modells, das im Erstarrungsverfahren untersucht werden soll, aus Dekorit verschiedener Herkunft hergestellt werden, so ist zu beachten, daß Material verschiedener Herkunft im allgemeinen verschiedener Härtungszeiten bedarf, um gleiche Eigenschaften zu erhalten Es ist daher unbedingt erforderlich, diese Härtungszeiten vorher genau zu ermitteln Zu diesem Zweck härtet man Probestäbe 7 Stunden bei 115° und bestimmt bei 80° die spannungsoptischen Konstanten Mit diesen geht man in die Zahlentafel 3 ein und stellt die Härtungszeiten fest, die den spannungsoptischen Konstanten entsprechen. Um die Differenz der Härtungszeiten muß das eine Material länger gehärtet werden. Man bringt die Teile aus diesem Material bei der Härtung um die entsprechende Zeit früher in den Ofen.

An den zu leimenden Stellen wird die Schutzhülle entfernt, soweit dies notwendig ist, und diese Stellen mit der Feile oder mit Schmirgelpapier aufgerauht, Ölreste eventuell mit Methylalkohol entfernt. Dann werden die Leimstellen mit Resinol bestrichen, dem vorher 15 % einer Spezialhärteflüssigkeit, die vom Hersteller geliefert wird, zugesetzt worden ist. Hierauf läßt man die Einzelteile noch etwa ½ Stunde an der Luft trocknen und setzt sie dann zusammen. Die Trocknung des Leimes erfolgt bei 50° C mindestens 24 Stunden lang. Hierbei erfolgt gleichzeitig eine Vernetzung des Resinols, das ein Kunstharz auf der Phenolbasis ist. Modelle, die im Erstarrungsverfahren untersucht werden, müssen bei 55 bis 60° C mindestens 48 Stunden trocknen, da sonst der Leim nicht genügend wärmebeständig ist.

Nach beendeter Trocknung wird die Schutzhülle auch auf die Leimstellen aufgebracht.

Abb. 8 zeigt das Modell eines Fahrgestellteiles, das durch Leimen zusammengesetzt wurde.

Es können auch Dekoritteile verschiedener Härte miteinander verleimt werden. Davon kann man oft mit Vorteil Gebrauch machen. Man kann so ein Modell aus Einzelteilen zusammensetzen,

[1] Siehe Fußnote 5 von S. 267.

die sich beim Erstarrungsverfahren in ihrer Steifigkeit um ein Vielfaches voneinander unterscheiden.

e) Herstellen von Modellteilen durch Warmverformen. Bis zu gewissen Grenzen läßt sich Dekorit auch warm verformen. Große Verformungen sind allerdings nicht möglich, da die Phenolkunstharze keine Thermoplaste sind, sondern schon ein verhältnismäßig stabiles Makromolekülnetz besitzen. Man hat sich den Vorgang der Warmverformung so vorzustellen, daß das polymere Netz bei der Verformung zunächst Spannungen aufnimmt, die man bei weiterer Wärmebehandlung unter Beibehaltung der Verformung dank der Tatsache, daß bei ungehärtetem Dekorit das Netz nicht vollkommen stabil ist, langsam wieder zum Verschwinden bringen kann, so daß dann das Kunstharz in der neuen Gestalt spannungsfrei ist. Im polarisierten Licht kann man dies nachprüfen.

Infolge der Beschränkung der Verformungsmöglichkeit kommt im wesentlichen nur Biegen von plattenförmigen Teilen in Frage, wenn der Krümmungsradius nicht kleiner ist als etwa das 15fache der Plattendicke.

Das Biegen erfolgt zweckmäßig in Holzformen bei 90 bis 95° C, wobei gleichzeitig die Härtung erfolgt. Man schneidet sich die nötigen Platten aus ungehärtetem Dekorit, unter Zugabe einiger cm an den Enden, zurecht und umgibt sie mit einer Schutzhülle. Diese muß aus mehreren sich überlappenden Teilen zusammengesetzt sein, damit sie der Verformung nachgeben kann

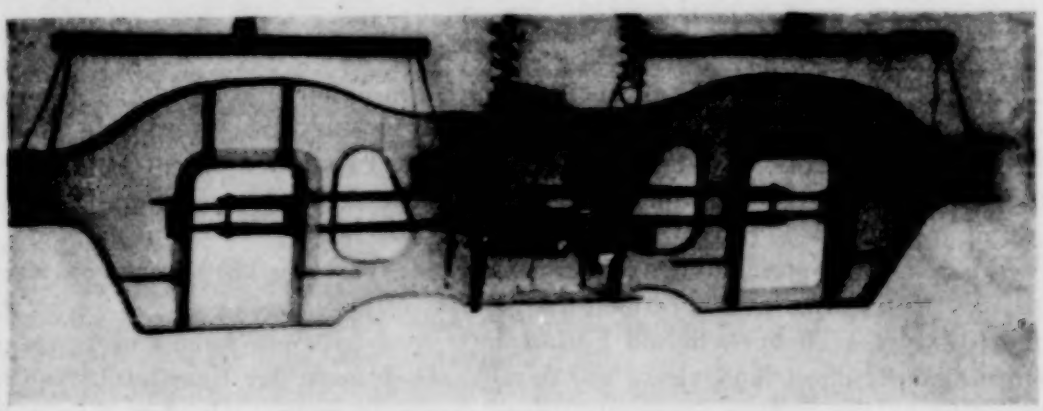


Abb. 8. Dekoritmodell eines Fahrgestellteiles.

und nicht selbst eine Spannung aufnimmt. Dann werden Platte und Form erwärmt und nach etwa einer Stunde die eingewickelte Platte in die Form gebracht. Wird nur nach einer Seite nach einem Kreisbogen gebogen, so genügt eine konvexe Holzform auf einer Seite. Es brauchen dann nur die beiden Enden etwas belastet zu werden. Bei verschiedenen Krümmungsradien an einem Stück ist auch eine Gegenform notwendig, die etwas belastet wird. Im letzteren Falle läßt man das Oberteil der Form nur während etwa der Hälfte der Härtungszeit auf dem Modell und nimmt es dann zur weiteren Härtung ab. Dabei gleichen sich dann die Eigenspannungen, die sich an den Druckstellen gebildet haben, wieder aus. Nach abgelaufener Härtungszeit kühlt man in üblicher Weise langsam ab.

6. Der spannungsoptische Versuch und der Eichversuch. a) Ebene Spannungsoptik. Der ebene spannungsoptische Versuch wird heute im allgemeinen nur mehr in der einfachen Apparatur mit Großflächen-Polarisationsfiltern[1] durchgeführt. Über die Einspannvorrichtung lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Als zweckmäßig hat sich ein Rahmen mit mehreren in der Höhe verstellbaren Traversen erwiesen. Das übrige wird dem speziellen Problem entsprechend mehr oder weniger improvisiert. Die Belastung wird meist durch geeichte Ringdynamometer oder durch bekannte Gewichte aufgebracht. Streckenlasten lassen sich mit Vorteil durch einen wassergefüllten Schlauch aufbringen, doch bereitet die Messung der Kraft Schwierigkeiten. Der Wasserdruck im Schlauch ist infolge von Reibungsverlusten, und weil der Schlauch in Richtung der Dicke des Modells nie ganz gleichmäßig angepreßt wird, kein sicheres Maß für die Last.

[1] *L. Föppl* und *R. Hiltscher*, Bauing. 20 (1939), S. 231. — *L. Föppl* und *E. Müller-Lufft*, ATM. V 137–1, Lieferung 100. Okt. 1939.

Das einfachste und meist angewandte Auswertungsverfahren ist das des Auszählens der Isochromaten. Wegen näherer Einzelheiten über Auswertung muß auf die Literatur verwiesen werden[1]. Es sei hier nur daran erinnert, daß die Isochromatenordnung, multipliziert mit der optischen Konstante S (Dimension $\frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}}$ cm) und dividiert durch die Modelldicke, die Hauptspannungsdifferenz an der betreffenden Stelle ergibt. Die spannungsoptische Konstante S wird durch einen Eichversuch an einem Probestab bestimmt, der aus demselben Material besteht wie das Modell, und die gleiche Wärmbehandlung erfahren hat.

Gewöhnlich verwendet man zur Eichung einen auf reine Biegung beanspruchten Stab. Er zeigt belastet eine Reihe von der neutralen Faser nach außen in der Ordnung steigender Isochromatenstreifen. Man zählt nun ab, wie oft der Abstand von einer Isochromate bis zur nächsten in der ganzen Stabhöhe enthalten ist. Wird diese Zahl mit z, das Biegemoment mit M, die Kantenspannung mit σ, die Höhe des Stabes mit h und seine Dicke mit d bezeichnet, so ist die spannungsoptische Konstante

$$S = \frac{\sigma}{z/2}\, d = \frac{12\, M}{h^2\, z}\,. \tag{10}$$

Die Kantenspannung soll im Interesse der Genauigkeit den bei den Versuchen, bzw. die Isochromatenordnung am Rand des Eichstabes den beim Versuch auftretenden Ordnungen ungefähr entsprechen. Für die meist angewandte Modelldicke von 1 cm sind die Werte $M = 80$ cm kg und $h = 2$ cm geeignet. Mit diesen Werten wird

$$S = \frac{240}{z}\ \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}}\ \text{cm}\,.$$

Die Anzahl z der Isochromatenabstände beträgt dann bei gehärtetem Dekorit 16 bis 18, womit stets eine genügende Genauigkeit erreicht werden kann, wenn man Bruchteile noch abschätzt.

Da auch gehärtetes Dekorit nicht ganz frei von Kriechen ist, muß zwischen Belastung des Eichstabes und Abzählen der Isochromaten dieselbe Zeit verstreichen, wie beim Versuch zwischen Belastung und photographischer Aufnahme der Isochromaten.

Der Eichversuch soll im gleichen Raum wie der Hauptversuch vorgenommen werden, da die spannungsoptische Konstante temperaturabhängig ist.

Bei den in Abschnitt 4c besprochenen Fällen mit vorgegebenen Formänderungsgrößen muß neben der spannungsoptischen Konstante vor dem Versuch auch der Elastizitätsmodul gemessen werden. Dies geschieht am besten ebenfalls durch einen Biegeversuch, den man mit der Eichvorrichtung zur Bestimmung der spannungsoptischen Konstante kombinieren kann.

b) Erstarrungsverfahren. Bei Anwendung des Erstarrungsverfahrens ist zunächst zu entscheiden, ob es bei konstanter Belastung durchgeführt werden darf oder ob die Verformung konstant gehalten werden muß (siehe Abschnitt 3c). Im letzteren Falle ist die Frage, ob Fehler durch Wärmedehnung des Modells genügend vermieden werden können, sorgfältig zu prüfen.

Die Belastungsvorrichtung ist so gedrängt zu konstruieren, daß sie im elektrischen Ofen Platz hat.

Außer der Belastungsvorrichtung muß eine Eichvorrichtung im Ofen Platz finden. Man verwendet auch hier mit Vorteil einen auf reine Biegung beanspruchten Stab. Geeignete Abmessungen des Eichstabes sind: 100 mm lang, 20 mm hoch und 5 mm dick, belastet durch ein Biegungsmoment von 3,33 cm kg. Nach (10) berechnet sich dann aus der Zahl z der Isochromatenabstände über die Stabhöhe die spannungsoptische Konstante

$$S = \frac{1}{z}\ \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}}\ \text{cm}\,.$$

Bei der günstigen Härtung von 7 Stunden bei 115° C erhält man beim Verfahren konstanter Last die fünfte bis achte Isochromatenordnung. Bei Verwendung für das Verfahren konstanter Formänderung muß die Verformung arretiert werden können.

Beim Anlegen der Schutzhülle an den Eichstab ist darauf zu achten, daß diese zweiteilig sein muß, da sie sonst auf einer Seite Zugspannungen aufnehmen würde und damit die Biegung des Dekoritstabes verhindern und das Ergebnis fälschen könnte.

Der Versuch im Erstarrungsverfahren beginnt damit, daß das Modell samt Belastungsvorrichtung sowie die Eichvorrichtung 2 bis 4 Stunden, je nach der Größe des Modells, auf die Versuchstemperatur erwärmt wird. Diese beträgt im allgemeinen 80° C, wenn nicht auf Grund eines

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 267, ferner auch *R. Hiltscher*, Forsch. Ing. Wes. 15 (1944), S. 12.

Vorversuches mit einem Eichstab gemäß den in Abschnitt 3d mitgeteilten Erwägungen eine andere Versuchstemperatur geboten erscheint. Wenn Modell und Versuchsstab erwärmt sind, wird auf beide die Belastung aufgebracht. Federbelastungen müssen, besonders bei Beginn des Versuches, ständig nachgestellt werden. Wird das Verfahren konstanter Formänderung benützt, so wird möglichst bald nach der Belastung die Formänderung bei Modell und Eichstab[1] arretiert. Daß die Zeit, die zwischen Belastung und Arretieren der Formänderung verstreicht, möglichst kurz sein soll, ist bereits in Abschnitt 3 e gesagt worden.

Die Temperatur wird nach Aufbringen der Lasten noch 2 Stunden lang konstant gehalten und dann langsam, etwa um 10° je Stunde, gesenkt.

Vom Augenblick der Belastung an bilden sich infolge der Verformung des Modells Falten in der Schutzhülle. Diese müssen von Zeit zu Zeit glattgestrichen werden, damit keine Luft eindringen und Randeffekt hervorrufen kann. Besonders bilden sich kurz nach der Belastung und bei der Abkühlung infolge der Wärmedehnung Falten.

Nachdem im Ofen sich Zimmertemperatur eingestellt hat, wartet man noch einige Stunden und kann dann das Modell aus der Belastungsvorrichtung herausnehmen. Die Schutzhülle wird erst abgenommen, wenn das Modell zur Auswertung zerschnitten wird.

Das schwierige Kapitel der Auswertung des räumlichen Spannungszustandes soll hier nur kurz gestreift werden. Zunächst ist im Einzelfall genau zu überlegen, wie das Modell zerschnitten wird. Man wird sich vor allem nach Möglichkeit an solche Schnitte halten, bei denen bekannt ist, daß eine Hauptspannung senkrecht zum Schnitt steht. Dies ist vor allem bei Symmetrieschnitten und bei Schnitten längs der lastfreien Oberfläche der Fall. Solche Schnitte geben in der einfachen spannungsoptischen Apparatur Isochromatenbilder, die, wie in der ebenen Spannungsoptik, die Verteilung der Hauptspannungsdifferenzen darstellen und ebenso ausgewertet werden. Auch kann man mit Hilfe der Isoklinen die Richtung dieser Hauptspannungen feststellen. Dies gibt oft schon einen guten Überblick. Die vollständige Auswertung des Spannungszustandes an der lastfreien Oberfläche ist durch die Verwendung konvergenten Lichts nach *Hiltscher*[2] möglich. Eine weitere Möglichkeit ist noch die, einen weiteren Schnitt senkrecht zu einer der anderen Hauptrichtungen zu legen. Allerdings kann man mit diesem Schnitt beim gleichen Modell nicht mehr genau dieselbe Stelle treffen, es sei denn, daß man ein zweite Modell anfertigt. Bei beliebigen Schnitten im Innern des Modells können durch das *Hiltscher*sche Verfahren die drei Hauptrichtungen und die drei Hauptspannungsdifferenzen festgestellt werden. Auf diese etwas umständlichen Messungen kann man aber oft verzichten, da die größten Spannungen, auf die es meist ausschließlich ankommt, fast immer an der Oberfläche liegen.

Im übrigen sind die Forschungen über rationelle Gestaltung der räumlichen Auswertungstechnik noch nicht abgeschlossen und man darf hier noch mit mancher Verbesserung rechnen.

Die Schnittdicke beträgt im allgemeinen 3 bis 4 mm. Ebene und einfach gekrümmte Schnitte werden auf der Bandsäge bei großer Schnittgeschwindigkeit und kleinem Vorschub herausgenommen, mehrfach gekrümmte Schnitte, z. B. an gekrümmten Oberflächen am besten durch Drehen und Fräsen, ebenfalls mit kleinem Vorschub. Die mit der Bandsäge herausgearbeiteten Schnitte können durch Drehen oder Fräsen noch nachgearbeitet werden. Meist ist dies jedoch nicht einmal nötig. Wenn man sie beiderseits mit Öl bestreicht, werden sie trotz ihrer rauhen Oberfläche meist genügend durchsichtig.

7. Anhang. Beschreibung der Versuche, durch die die Werte der Tafeln 3 und 4 in Abschnitt 3d ermittelt wurden.

Zur Aufstellung der Tafel 3, die die spannungsoptische Konstante S_L enthält, wurden insgesamt 30 Biegungsversuche bei verschiedenen Temperaturen mit verschieden gehärteten Dekoritstäben durchgeführt. Die Probestäbe waren je an zwei 5 cm voneinander entfernten Haken aufgehängt. Die Belastung jedes Stabes bestand in zwei Gewichten von je 0,5 kg in einem Abstand von 6 cm von der Aufhängung, so daß der Mittelteil ein reines Moment von 3 cm kg aufnahm. Die Stäbe waren 1,5 cm hoch und 0,8 cm stark.

Die Probestäbe wurden sofort nach der Herstellung mit einer Schutzhülle versehen und dann bei 95° C so gehärtet, daß Härtungen erzielt wurden, die solchen von 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 Stunden

[1] Da beim Verfahren konstanter Formänderung schon vor dem Hauptversuch ein Eichversuch zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls durchgeführt werden muß, dient der Eichversuch während des Hauptversuchs nur mehr als Kontrolle.

[2] *R. Hiltscher*, Forsch. Ing. Wes. 9 (1938), S. 91. Diss. München.

bei 115° gleichkamen. Um die Härtewerte und insbesondere den Abstand von einer Stunde zwischen den einzelnen Werten möglichst genau zu erhalten, wurden sämtliche Stäbe in einem Zuge gehärtet, indem immer nach der Zeit von 5 h 19 min, die der Härtung von 1 Stunde bei 115° entspricht, einige Stäbe hinzugefügt und zum Schluß alle Stäbe gemeinsam noch die der Härtung von 4 Stunden entsprechende Zeitspanne gehärtet und dann gemeinsam abgekühlt wurden.

Das Erstarrungsverfahren wurde in der unter 3 d angegebenen Weise durchgeführt. Um Unstimmigkeiten der Ergebnisse untereinander, die durch ungenaues Einhalten der Versuchstemperatur entstehen könnten, auszuschalten, wurden jeweils alle Versuche, die bei derselben Temperatur auszuführen waren, gleichzeitig erledigt.

Nach dem Erkalten wurde im zirkularpolarisierten Na-Licht die Isochromatenordnung in der Randfaser des auf reine Biegung beanspruchten Mittelteiles festgestellt. Aus ihr ergab sich mit Hilfe von Gl. (10) die spannungsoptische Konstante S_L für jeden Versuch. Die Ergebnisse von sämtlichen Versuchen wurden in Abb. 1 zusammengetragen und lieferten die Kurven sowohl der Abb. 1 als auch der Abb. 2. Aus den Kurven der Abb. 1, in denen die Streuungen der Versuche ausgeglichen sind, wurde die Zahlentafel 3 zusammengestellt.

Die in Zahlentafel 4 mitgeteilten Werte für den Elastizitätsmodul E_L wurden auf Grund folgender Überlegungen durch Rechnung erhalten. Der Elastizitätsmodul kann für die durchgeführten Biegeversuche gefunden werden, wenn zu der Spannung, die ja bekannt und für alle Versuche die gleiche ist, auch die zugehörige Dehnung bekannt ist. Die Dehnung wiederum könnte auch der Isochromatenordnung ermittelt werden, wenn die dehnungsoptische Konstante bekannt wäre. Nun wurden vom Verfasser früher[1] dehnungsoptische Konstanten für Dekorit gemessen, allerdings nur für das Erstarrungsverfahren konstanter Formänderung. Da aber sowohl die genannte Arbeit als auch andere Beobachtungen die Erkenntnis brachten, daß der optische Effekt bei den Phenolkunstharzen ein wesentlich dehnungsoptischer ist, also weitgehend unabhängig davon ist, wie die Last aufgebracht wurde, ist der Fehler sicherlich nicht groß, der gemacht wurde, indem die dort gefundenen dehnungsoptischen Konstanten verwendet wurden.

Der Zusammenhang zwischen Dehnung ε, Isochromatenordnung n, Modelldicke d und dehnungsoptischer Konstanten D in der in der früheren Arbeit gegebenen Definition ist

$$\varepsilon = \frac{n}{D\,d},$$

und somit wird der Elastizitätsmodul erhalten aus

$$E = \frac{\sigma}{n}\,D\,d.$$

Als Isochromatenordnung n ist diejenige einzusetzen, die im erkalteten Modell vor der Entlastung vorhanden ist, da ja der Elastizitätsmodul E sich laut Definition in Abschnitt 3 d auf die vor der Entlastung im Modell vorhandene Dehnung beziehen soll. Da aber die Isochromatenordnung am entlasteten Modell beobachtet wurde, mußte an ihr eine Korrektur um denjenigen Betrag vorgenommen werden, um den sie sich bei der Entlastung verringert. Dieser Betrag ist, wenn S_0 die spannungsoptische Konstante des Materials bei Zimmertemperatur bedeutet, $\sigma \cdot d/S_0$ und muß zu n addiert werden. Die für den Korrekturbetrag benötigten Werte von S_0 für die verschiedenen Härtungen wurden aus den in Tafel 2 enthaltenen Angaben interpoliert.

Als dehnungsoptische Konstante wurde aus Abb. 10 der früheren Arbeit die Größe D_2 entnommen und für dort nicht enthaltene Temperaturen interpoliert. Dies ist insofern nicht ganz richtig, als D_2 sich auf den Zustand zwar 2 Stunden nach der Belastung, aber noch vor der Abkühlung bezieht, doch ist der dadurch bedingte Fehler auf Grund der oben angestellten Betrachtungen über die Natur des optischen Effektes als gering anzunehmen.

Aus dem Mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München.

(Eingegangen am 28. Juni 1947.)

[1] Siehe Fußnote 5 von S. 267.

Soeben erschien:

Zeitschrift für angewandte Physik

Herausgegeben von *W. Meissner* und *G. Joos*

Die Zeitschrift erscheint zunächst zwanglos in einzeln berechneten Heften.
12 Hefte bilden einen Band.

Erster Band
1. Heft

Mit 38 Textabbildungen. 48 Seiten. 1948.
RM 7.50

Inhaltsverzeichnis:

Feinwanderung an Abhebekontakten. Von Isolde *Dietrich* und Eduard *Rüchardt*. – Bestimmung des Dampfdruckes von Glykol-Wasser-Gemischen bei Temperaturen bis zu 150° C. Von W. *Hellwig*. – Ein Gerät zum Aufsuchen von Eisenstücken in Bäumen. Von Jakob *Hacks*. – Zum Mechanismus der Elektronennachlieferung beim Selbständigwerden der Townsendentladung, insbesondere bei koaxialen Zylinderelektroden. Von H. *Fetz* und G. *Medicus*. – Strukturuntersuchungen an γ-Al_2O_3-Hydrargillit. Von Fritz *Asselmeyer*. – Berichte: Stand und Entwicklung der spektrochemischen Analyse (Emissions-Analyse). Von Heinrich *Kaiser*. – Bericht über die Eigenschaften der technisch wichtigen sinterbaren Dauermagnetlegierungen des Metallsystems Eisen-Nickel-Aluminium mit Zusätzen von Titan und Kobalt. Von Wilhelm *Zumbusch*. – Buchbesprechungen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
J. F. BERGMANN / MÜNCHEN

In Kürze beginnt wieder zu erscheinen:

Archiv für Elektrotechnik

In Zusammenarbeit mit der bizonalen Arbeitsgemeinschaft (VDE Britische Zone — Arbeitsgemeinschaft der Elektrotechnischen Vereine der Amerikanischen Zone)

Herausgegeben von
Prof. Dr.-Ing. *Johannes Fischer* und Prof. Dr.-Ing. *Werner Nürnberg*
Karlsruhe (Baden) Berlin

Band 39

Das „Archiv für Elektrotechnik" erscheint vorläufig nach Maßgabe der eingehenden Arbeiten in einzeln berechneten Heften.

Die Mitglieder der der oben genannten bizonalen Arbeitsgemeinschaft angehörenden Vereine haben Anspruch auf einen Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter der Zulassungsnummer US-W-1093 der Nachrichtenkontrolle der Militärregierung.
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Hans-Georg Halfter, Stahnsdorf b. Berlin, Meisenweg 33
Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag, Heidelberg und Berlin. 1500 Exemplare. Printed in Germany.